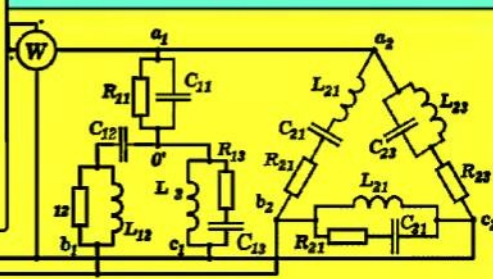
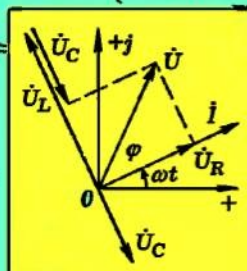


Майер Р.В.

РАСЧЕТ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ В СИСТЕМЕ

MathCAD



A :=

|TOK

S :=

S =

Uab

Pw :=

fi1 :=

r2 :=

A :=

|TOK

S := E1 ·

S =

Uab1 :=

$P_w = P_{Uab} \cdot (\text{Re}(\text{TOK}_0) - i \cdot \text{Im}(\text{TOK}_0))$ $P_w = 90.172$

$K := A^{-1} \cdot B$ $\text{TOK} =$

$|\text{TOK}_2| = 1.159$

$(\text{TOK}_0) + E3 \cdot (\text{Re}(\text{TOK}_2) - i \cdot \text{Im}(\text{TOK}_2))$

$r3 := 3$ $E1 := 100$ $E3 := 60 \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$

$z3 := r3 + \frac{(\pi 3 + i \cdot w \cdot L3) \cdot \frac{-i}{w \cdot C3}}{(\pi 3 + i \cdot w \cdot L3) + \frac{-i}{w \cdot C3}}$

$755i$
 $.23i$
 $475i$

$60 \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$

$755i$
 $1.23i$
 $475i$

$60 \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$

$fi2 := \arg(\text{TOK})$

Майер Р.В.

**РАСЧЕТ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
В СИСТЕМЕ MathCAD**

Печатается по решению кафедры информационных технологий в физическом образовании Глазовского государственного педагогического института имени В. Г. Короленко.

Автор: Майер Роберт Валерьевич.

Рецензенты:

В. А. Саранин, доктор физико–математических наук, профессор кафедры физики и дидактики физики ГОУ ВПО "Глазовский государственный педагогический институт".

А. В. Проказов, кандидат физико–математических наук, доцент кафедры физики и дидактики физики ГОУ ВПО "Глазовский государственный педагогический институт".

Майер Р.В. Расчет электрических цепей в системе MathCAD: Учебное пособие. — Глазов: ГГПИ, 2007. — 44 с.

В краткой форме рассмотрены методы расчета различных электрических цепей с помощью пакета MathCAD. Проанализированы цепи постоянного тока, переменного тока, трехфазные цепи, индуктивно связанные цепи, цепи с источниками периодической негармонической ЭДС, переходные и автоколебательные процессы, фильтры. Пособие предназначено для преподавателей и студентов вузов.

© Майер Р.В.

© ГГПИ

СОДЕРЖАНИЕ

1. Цепи постоянного тока	3
2. Цепи переменного тока	7
3. Трехфазные цепи	16
4. Переходные процессы	23
5. Автоколебательные процессы	26
6. Расчет фильтров	29
7. Индуктивно связанные цепи	32
8. Цепи, содержащие источники негармонических ЭДС	35
9. Приложение	43

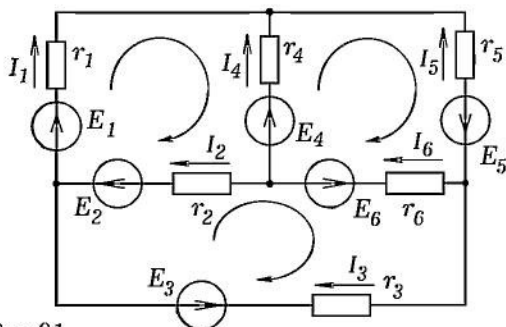
Электрическая цепь представляет собой систему источников и потребителей электрической энергии, соединенных проводниками. Рассчитать электрическую цепь — значит определить токи во всех ее ветвях. Закон Ома для участка цепи: Сила тока I прямо пропорциональна напряжению U и обратно пропорциональна сопротивлению R : $I = U/R = YU$, где $Y = 1/R$ — проводимость нагрузки. Закон Ома для полной цепи: Сила тока прямо пропорциональна ЭДС и обратно пропорциональна полному сопротивлению цепи: $I = E/(r + R)$, где r — внутреннее сопротивление источника, R — сопротивление нагрузки.

Законы Кирхгофа: 1. Алгебраическая сумма токов, втекающих в узел, равна нулю. 2. Алгебраическая сумма ЭДС, действующих внутри замкнутого контура, равна алгебраической сумме напряжений на элементах контура. Математическая запись:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n I_i r_i, \quad \text{или}$$

$$I_1 - I_2 + I_3 + \dots = 0, \quad E_1 + E_2 - E_3 \dots = I_1 r_1 + I_2 r_2 - I_3 r_3 + \dots$$

Универсальным методом расчета цепей постоянного тока является метод Кирхгофа. Пусть цепь состоит из 6 ветвей, в каждой из которых находится источник постоянной ЭДС и резистор (рис. 01). Метод Кирхгофа состоит в следующем: 1. Произвольно выбирают предполагаемые направления токов во всех n ветвях. 2. Выбирают независимые контуры и направление обхода в них. 3. Если цепь содержит k узлов, то из первого закона Кирхгофа получают независимые уравнения для $(k - 1)$ узлов. 4. Из второго закона Кирхгофа записывают систему из m независимых уравнений для каждого контура. 5. Решают систему из $n = k + m$ независимых уравнений с n неизвестными, вычисляя токи. 6. Если ток I_i отрицательный, то делают вывод, что действительное направление тока в данной ветви противоположно предполагаемому.



$$\begin{cases} I_1 r_1 + I_2 r_2 - I_4 r_4 = E_I, \\ I_4 r_4 - I_5 r_5 + I_6 r_6 = E_{II}, \\ -I_2 r_2 + I_3 r_3 - I_6 r_6 = E_{III}, \\ I_1 + I_4 + I_5 = 0, \\ -I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\ -I_3 - I_5 - I_6 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E_I &= E_1 + E_2 - E_4, \\ E_{II} &= E_4 + E_5 - E_6, \\ E_{III} &= -E_2 - E_3 + E_6. \end{aligned}$$

Рис.01

Получающаяся система уравнений (рис. 01) может быть записана в матричном виде: $\mathbf{E} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{I}$, через матрицы контурных ЭДС $\mathbf{E}$, сопротивлений $\mathbf{R}$, токов $\mathbf{I}$:

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

Из закона сохранения энергии следует баланс мощностей: Алгебраическая сумма мощностей всех источников ЭДС равна сумме мощностей всех потребителей. Если направление тока совпадает с направлением ЭДС, то мощность

источника положительна и равна $P_{Ei} = E_i I_i$, в противном случае источник работает в режиме потребителя и вырабатывает отрицательную мощность: $P_{Ei} = -E_i I_i$. Мощность, потребляемая приемниками электрической энергии, равна $P_{ri} = I_i^2 r_i = I_i U_i = U_i^2 / r_i$.

Задача 1.1. К источнику постоянной ЭДС E и внутренним сопротивлением r_0 подключен резистор R (рис.02). Постройте график зависимости КПД и мощности, выделяющейся на резисторе, от его сопротивления. Определите, при каком сопротивлении нагрузки на ней выделяется максимальная мощность.

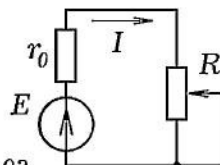


Рис.02

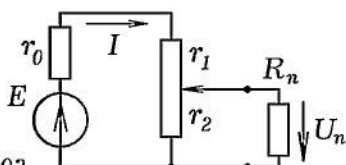
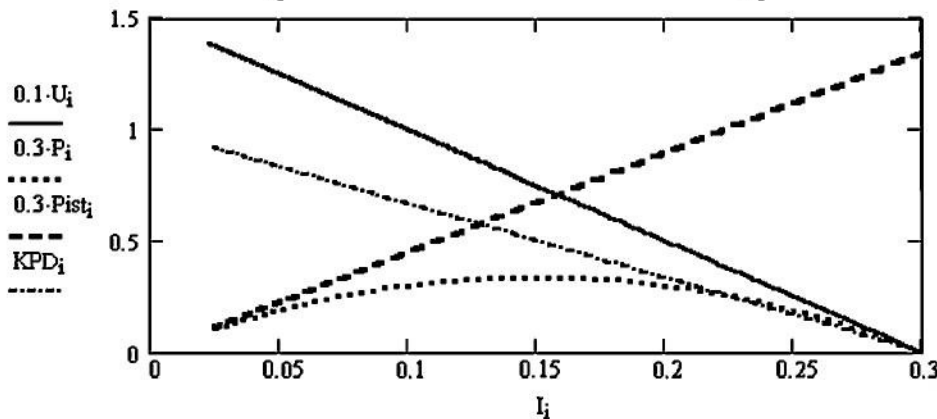
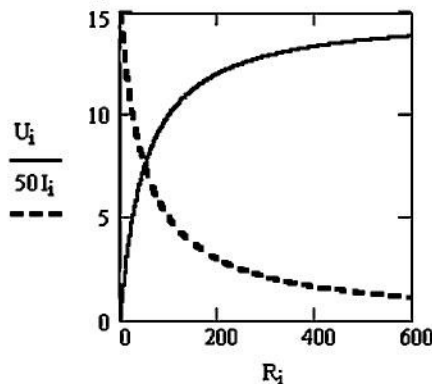
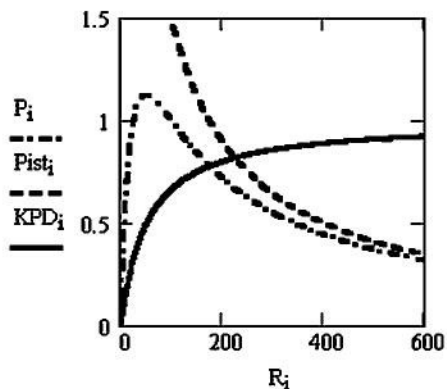


Рис.03

$$i := 0, 1..600 \quad R_i := i \cdot 1 \quad r_0 := 50 \quad E := 15$$

$$I_i := \frac{E}{r_0 + R_i} \quad \boxed{01.mcd}$$

$$U_i := I_i \cdot R_i \quad P_i := (I_i)^2 \cdot R_i \quad \text{Pist}_i := E \cdot I_i \quad \text{KPD}_i := \frac{P_i}{\text{Pist}_i}$$



Мощности источника и нагрузки равны: $P_{\text{ист}} = EI$, $P_{\text{нагр}} = I^2 R$. КПД источника может быть найдено по формуле: $\eta = P_{\text{нагр}}/P_{\text{ист}}$. В документе 01.mcd создается одномерный массив сопротивлений R_i и затем рассчитываются соответствующие значения тока, мощностей и КПД, которые также записываются в одномерные массивы. По результатам вычислений строятся графики. Из них следует, что максимальная мощность на нагрузке выделяется тогда, когда ее сопротивление равно внутреннему сопротивлению источника (согласованный режим). При этом КПД $\eta = 0,5$. В режиме короткого замыкания ($R = 0$) КПД $\eta = 0$, так как полезная мощность на нагрузке не выделяется ($P_{\text{нагр}} = 0$). В режиме холостого хода сопротивление нагрузки $R \rightarrow \infty$, ток $I \rightarrow 0$, КПД $\eta = 1$. Из второго графика следует, что с ростом сопротивления R ток I уменьшается, напряжение U на клеммах источника растет. На третьем рисунке представлены кривые изменения U , $P_{\text{нагр}}$, $P_{\text{ист}}$ и η в зависимости от тока I через нагрузку.

Задача 1.2. К источнику постоянной ЭДС E и внутренним сопротивлением r_0 подключен реостат сопротивлением R , использующийся в качестве делителя напряжения (рис. 03). Напряжение с делителя подается на нагрузку R_n . Изучите зависимость тока через источник, тока и напряжения на нагрузке от ее сопротивления и положения подвижного контакта реостата.

Создаются одномерные массивы r_{1k} и Rn_j , по их значениям вычисляются элементы двумерных массивов $R_{k,j}$, $I_{k,j}$, $Un_{k,j}$, $In_{k,j}$:

$$R_{k,j} = r_0 + r_{1k} + \frac{r_{2k} Rn_j}{r_{2k} + Rn_j}, \quad I_{k,j} = \frac{E}{R_{k,j}},$$

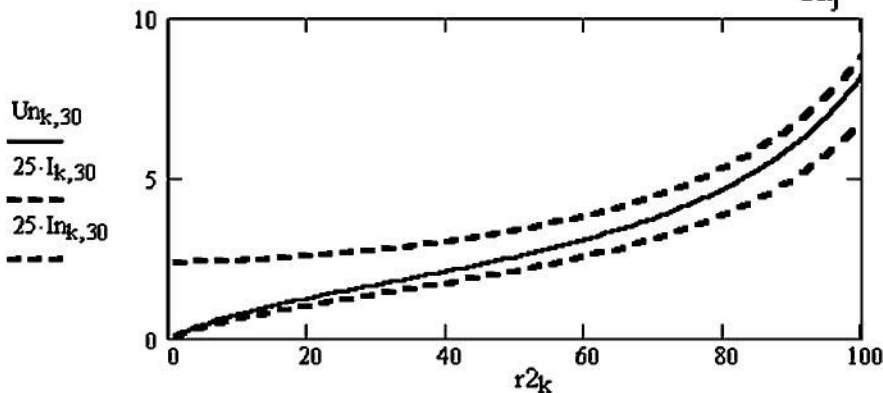
$$Un_{k,j} = E - I_{k,j}(r_0 + r_{1k}), \quad In_{k,j} = Un_{k,j}/Rn_j.$$

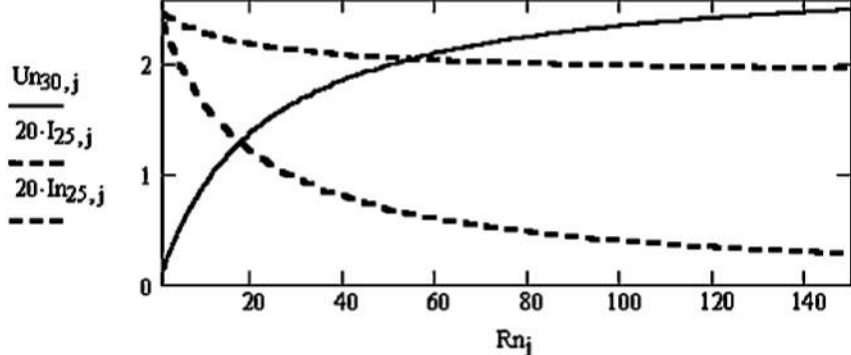
Результаты вычислений представимы в графическом виде (документ 02.mcd).

$$r_0 := 5 \quad r := 100 \quad k := 1..100 \quad E := 10 \quad r_{1k} := (1 - 0.01k) \cdot r \quad \boxed{02.mcd}$$

$$r_{2k} := 0.01k \cdot r \quad j := 1..150 \quad Rn_j := 1j \quad R_{k,j} := r_0 + r_{1k} + \frac{r_{2k} Rn_j}{r_{2k} + Rn_j}$$

$$I_{k,j} := \frac{E}{R_{k,j}} \quad Un_{k,j} := E - I_{k,j} \cdot (r_0 + r_{1k}) \quad In_{k,j} := \frac{Un_{k,j}}{Rn_j}$$





■ **Задача 1.3.** Рассчитайте цепь, изображенную на рис.01. Составьте баланс мощностей, убедитесь, что мощность, вырабатываемая всеми источниками, равна мощности, потребляемой всей нагрузкой.

Составим систему уравнений (рис.01) и запишем ее в виде матрицы:

$$\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & 0 & -r_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_4 & -r_5 & r_6 \\ 0 & -r_2 & r_3 & 0 & 0 & -r_6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 + E_2 - E_4 \\ E_4 + E_5 - E_6 \\ -E_2 - E_3 + E_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решение задачи представлено в документе 03.mcd.

$$R1 := 13 \quad R2 := 21 \quad R3 := 15 \quad R4 := 8 \quad R5 := 17 \quad R6 := 11$$

$$E1 := 5 \quad E2 := 13 \quad E3 := 9 \quad E4 := -6 \quad E5 := 12 \quad E6 := -8$$

03.mcd

$$E := \begin{pmatrix} E1 + E2 - E4 \\ E4 + E5 - E6 \\ -E2 - E3 + E6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad R := \begin{pmatrix} R1 & R2 & 0 & -R4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R4 & -R5 & R6 \\ 0 & -R2 & R3 & 0 & 0 & -R6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I := R^{-1} \cdot E \quad I = \begin{pmatrix} 0.481 \\ 0.812 \\ -0.331 \\ -0.086 \\ -0.395 \\ 0.726 \end{pmatrix}$$

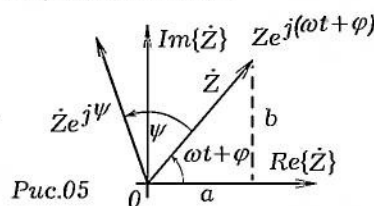
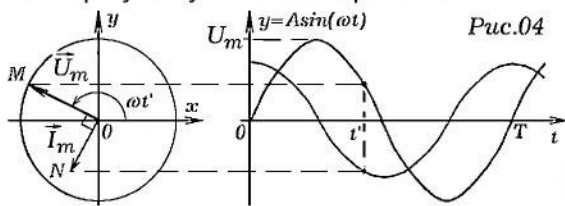
$$P_n := (I_0)^2 \cdot R1 + (I_1)^2 \cdot R2 + (I_2)^2 \cdot R3 + (I_3)^2 \cdot R4 + (I_4)^2 \cdot R5 + (I_5)^2 \cdot R6$$

$$P_{ist} := E1 \cdot I_0 + E2 \cdot I_1 - E3 \cdot I_2 + E4 \cdot I_3 - E5 \cdot I_4 - E6 \cdot I_5$$

$$P_{ist} = 27.001 \quad P_n = 27.001$$

1. Метод комплексных амплитуд. Рассмотрим цепь, содержащую источник переменной ЭДС, к которому подключены резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Переменному току $i(t) = I_m \sin(\omega t + \varphi)$ ставится в соответствие вектор длиной I_m , вращающийся вокруг своего начала O со скоростью ω на комплексной плоскости (рис. 04 и 05). Ему отвечает комплекс тока $\dot{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}$, где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, а проекция на любую ось, например, на ось действительных чисел, изменяется по гармоническому закону. Для расчета цепи необходимо перейти к комплексным значениям напряжения $\dot{U}$ и вычислить комплексы токов $\dot{I}$ во всех ветвях. Это позволит, определив их модули, найти амплитуды I_m и действующие значения I , а, взяв действительную часть, получить мгновенные значения $i(t)$.

Комплекс тока равен $\dot{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \dot{I}_m e^{j\omega t}$, где $\dot{I}_m = I_m e^{j\varphi}$ — комплексная амплитуда тока, характеризующая его амплитуду и начальную фазу, $e^{j\omega t}$ — оператор поворота (рис. 05). Метод комплексных амплитуд позволяет учесть сдвиг фаз между складываемыми токами и напряжениями. Удобно вместо комплексной амплитуды оперировать с комплексом действующего значения тока $\dot{I} = I e^{j\varphi}$, где $I = I_m / \sqrt{2}$, а множитель $e^{j\omega t}$ вообще не записывать, так как он присутствует во всех гармонически изменяющихся величинах.



Модуль комплексного числа $\dot{Z} = a + bj = Z e^{j\varphi}$ равен $|\dot{Z}| = Z = \sqrt{a^2 + b^2}$ и соответствует длине вектора на комплексной плоскости. Аргумент комплексного числа $\dot{Z}$ находится по формуле $\varphi = \arctg(b/a)$. Переход от обычной к показательной записи числа производится по формуле Эйлера: $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$. В частности, $e^{j\pi/2} = j$, $e^{-j\pi/2} = -j$, $e^{j2\pi/3} = -0,5 + 0,87j$, $e^{-j2\pi/3} = -0,5 - 0,87j$. Умножение комплексного числа $\dot{Z}$ на оператор $e^{j\psi}$ означает поворот соответствующего вектора на угол ψ (рис. 05).

Для комплексных действующих значений токов и напряжений остаются справедливыми законы Ома и Кирхгофа: $\dot{I} = \dot{U} / \dot{Z}$, $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dots = 0$, $\dot{E}_1 + \dot{E}_2 + \dots = \dot{I}_1 \dot{Z}_1 + \dot{I}_2 \dot{Z}_2 + \dots$. Метод эквивалентных преобразований состоит в замене последовательно и параллельно соединенных элементов одним эквивалентным им элементом с импедансом $\dot{Z}$ так, что токи во всех остальных ветвях, не подвергнутых преобразованию, остаются неизменными. При параллельном соединении элементов их комплексы проводимостей $\dot{Y} = 1 / \dot{Z}$ складываются:

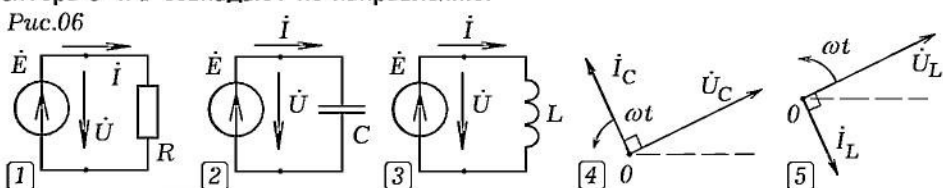
$$\dot{Y} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2, \quad \frac{1}{\dot{Z}} = \frac{1}{\dot{Z}_1} + \frac{1}{\dot{Z}_2}, \quad \dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \cdot \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}.$$

При последовательном соединении элементов складываются их импедансы:

$$\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2.$$

2. R, L, C — элементы в цепи переменного тока. К источнику ЭДС подключим резистор сопротивлением R (рис. 06.1). Тогда напряжение и ток будут изменяться по закону: $\dot{U} = Ue^{j\omega t}$, $\dot{I} = \dot{U}/R = Ie^{j\omega t}$. Колебания тока и напряжения происходят в одной фазе ($\varphi = 0$), поэтому на векторной диаграмме вектора $\vec{U}$ и $\vec{I}$ совпадают по направлению.

Рис.06

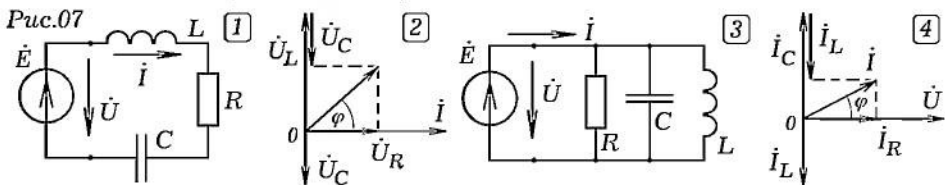


Если к источнику подключить идеальный конденсатор емкостью C (рис. 06.2), то $\dot{U} = Ue^{j\omega t}$, заряд конденсатора $\dot{Q} = C\dot{U} = CUe^{j\omega t}$. Учитывая, что $j = e^{j\pi/2}$, определим комплекс тока: $\dot{I} = d\dot{Q}/dt = j\omega CUe^{j\omega t} = Ie^{j(\omega t + \pi/2)}$, где $I = \omega CU$ — действующее значение тока. Видно, что колебания напряжения отстают от колебаний тока на четверть периода ($\varphi = -\pi/2$). Комплекс емкостного сопротивления равен $\dot{X}_C = \dot{U}/\dot{I} = 1/(j\omega C) = -j/(\omega C)$. Вектор тока повернут относительно вектора напряжения на $\pi/2$ в положительном направлении (против часовой стрелки) (рис. 06.4).

При подключении катушки индуктивности L (рис. 06.3) в ней возникает ЭДС самоиндукции, которая по закону Фарадея равна $\dot{E}_{si} = -Ld\dot{I}/dt = -\dot{U}$. Учитывая, что $1/j = -j = e^{-j\pi/2}$, запишем выражение для комплекса тока:

$$\dot{I} = \frac{1}{L} \int \dot{U} dt = \frac{1}{L} \int Ue^{j\omega t} dt = \frac{Ue^{j\omega t}}{j\omega L} = Ie^{j(\omega t - \pi/2)},$$

где $I = U/\omega L$ — действующее значение тока. Видно, что напряжение опережает колебания тока на четверть периода ($\varphi = \pi/2$) (рис. 06.5). Комплекс индуктивного сопротивления равен $\dot{X}_L = \dot{U}/\dot{I} = j\omega L$.



3. Последовательное соединение R, L, C — элементов. По второму закону Кирхгофа: $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$ (рис. 07.1). Так как $\dot{U} = \dot{I}\dot{Z}$, $\dot{U}_R = \dot{I}R$, $\dot{U}_C = \dot{I}\dot{X}_C$, $\dot{U}_L = \dot{I}\dot{X}_L$, то $\dot{I}\dot{Z} = \dot{I}R + \dot{I}\dot{X}_L + \dot{I}\dot{X}_C$. Комплекс полного сопротивления (импеданс) цепи:

$$\dot{Z} = R + \dot{X}_L + \dot{X}_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = Ze^{j\varphi},$$

При последовательном соединении элементов их комплексы сопротивлений (импедансы) складываются. Модуль импеданса равен полному сопротивлению

цепи: $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}$. Колебания напряжения $\dot{U}$ опережают ток $\dot{I}$ на величину:

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}\{\dot{Z}\}}{\text{Re}\{\dot{Z}\}} = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

Векторная диаграмма приведена на рис. 07.2.

4. Параллельное соединение R, L, C — элементов. По первому закону Кирхгофа: $\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C + \dot{I}_L$ (рис. 07.3). Так как $\dot{I} = \dot{U}\dot{Y}$, $\dot{I}_R = \dot{U}Y_R$, $\dot{I}_C = \dot{U}\dot{Y}_C$, $\dot{I}_L = \dot{U}\dot{Y}_L$, то

$$\dot{U}\dot{Y} = \dot{U}Y_R + \dot{U}\dot{Y}_C + \dot{U}\dot{Y}_L, \quad \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{X_C} + \frac{\dot{U}}{X_L}.$$

Комплекс проводимости:

$$\dot{Y} = Y_R + \dot{Y}_C + \dot{Y}_L = \frac{1}{R} + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = Y e^{j\varphi}.$$

Итак, при параллельном соединении элементов комплексы их проводимостей складываются. Модуль комплекса проводимости:

$$Y = \frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}.$$

Колебания напряжения $\dot{U}$ опережают колебания тока $\dot{I}$ на фазу:

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}\{\dot{Y}\}}{\text{Re}\{\dot{Y}\}} = -\arctg(R(\omega C - 1/\omega L)).$$

Векторная диаграмма изображена на (рис. 07.4).

5. Электрический резонанс. Колебательным контуром называется цепь, содержащая емкостные и индуктивные элементы, соединенные последовательно или параллельно. Резонанс — это такой режим работы колебательного контура, при котором его собственная частота ω_0 совпадает с частотой приложенного напряжения ω , а полное сопротивление или проводимость достигает экстремума (минимума или максимума).

В последовательном колебательном контуре (рис. 07.1) ток I и сдвиг фаз φ

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

На собственной частоте $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ полное сопротивление становится минимальным $Z = R$, ток достигает максимального значения $I = E/R$, сдвиг фаз $\varphi = 0$, то есть колебательный контур является чисто активной нагрузкой. При этом емкостное и индуктивное сопротивления равны $X_L = \omega L = 1/\omega C = X_C$, напряжения на конденсаторе $U_C = IX_C$ и катушке индуктивности $U_L = IX_L$ одинаковы, наступает резонанс напряжений.

В параллельном колебательном контуре (рис. 07.3) ток I и сдвиг фаз φ :

$$I = E \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}, \quad \varphi = -\arctg(R(\omega C - 1/\omega L)).$$

Когда $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ полная проводимость становится минимальной $Y = 1/R$, ток достигает своего минимума $I = EY = E/R$, сдвиг фаз $\varphi = 0$, то

Решение — в документе 04.tcd. По второму закону Кирхгофа определяют комплекс тока $\dot{I}$. Потенциал φ_0 точки O примем равным 0. Учитывая, что ток течет в сторону убывания потенциала, получаем: $\dot{\varphi}_1 = \dot{E}_1$, $\dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_1 - \dot{I}r_1$, $\dot{\varphi}_3 = \dot{\varphi}_2 - \dot{I}X_{C1}, \dots$ Обойдя контур, мы должны получить $\dot{\varphi}_0 = 0$. Потенциалы откладывают на комплексной плоскости и соединяют векторами напряжения (рис. 08.2). При этом вектора напряжений на резисторе (конденсаторе и катушке индуктивности) должны совпадать по направлению с вектором тока (отставать и опережать его на $\pi/2$ соответственно). Как требует второй закон Кирхгофа

$$\dot{E}_1 - \dot{E}_2 = \dot{U}_{r1} + \dot{U}_{C1} + \dot{U}_{r2} + \dot{U}_{L1} + \dot{U}_{r3} + \dot{U}_{C2} + \dot{U}_{L2} + \dot{U}_{r4}.$$

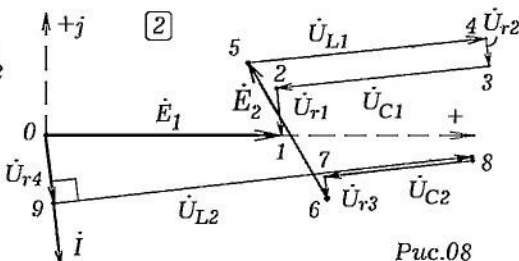
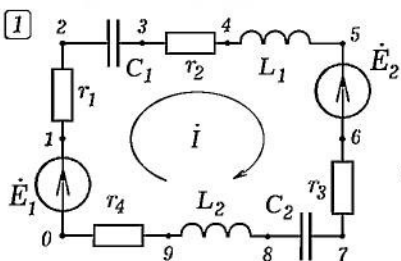
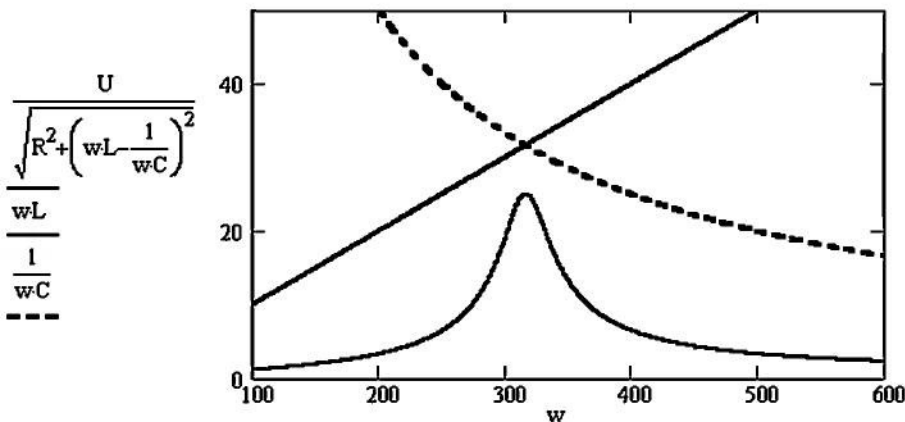
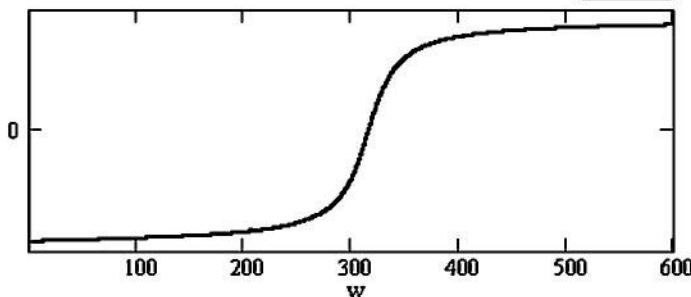


Рис.08

$$U := 100 \quad R := 4 \quad L := 0.1 \quad C := 100 \cdot 10^{-6}$$

05.mcd

$$\text{atan}\left(\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right)$$



Задача 2.2. Последовательно соединенные резистор, конденсатор и катушка индуктивности подключены к источнику переменного напряжения. Постройте графики зависимостей тока, напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности, а также сдвига фаз между током и напряжением от частоты.

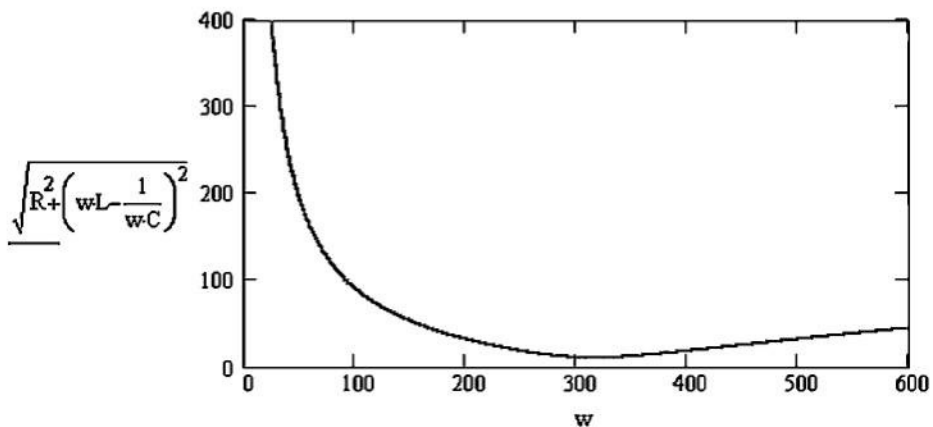
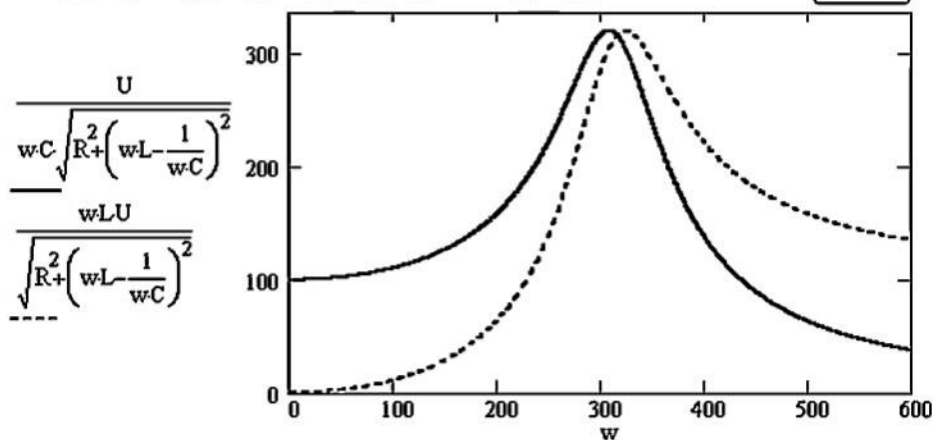
Полное сопротивление колебательного контура и сдвиг фаз между колебаниями тока и напряжения равны (документ 05.mcd):

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

Ток в контуре равен $I = U/Z$. Напряжение на конденсаторе и катушке индуктивности: $U_C = I/\omega C = U/(\omega C Z)$, $U_L = I\omega L = U\omega L/Z$. Графики $U_C(\omega)$, $U_L(\omega)$, $Z(\omega)$ построены в документе 06.mcd.

$$R := 10 \quad L := 0.1 \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \quad U := 100$$

06.mcd



Задача 2.3. Имеется параллельный колебательный контур, подключенный к источнику переменного напряжения регулируемой частоты. Изучите частотную зависимость полного сопротивления и проводимости контура $Z = Z(\omega)$, $Y = Y(\omega)$. Как изменится кривая $Z = Z(\omega)$, если уменьшить сопротивление R ?

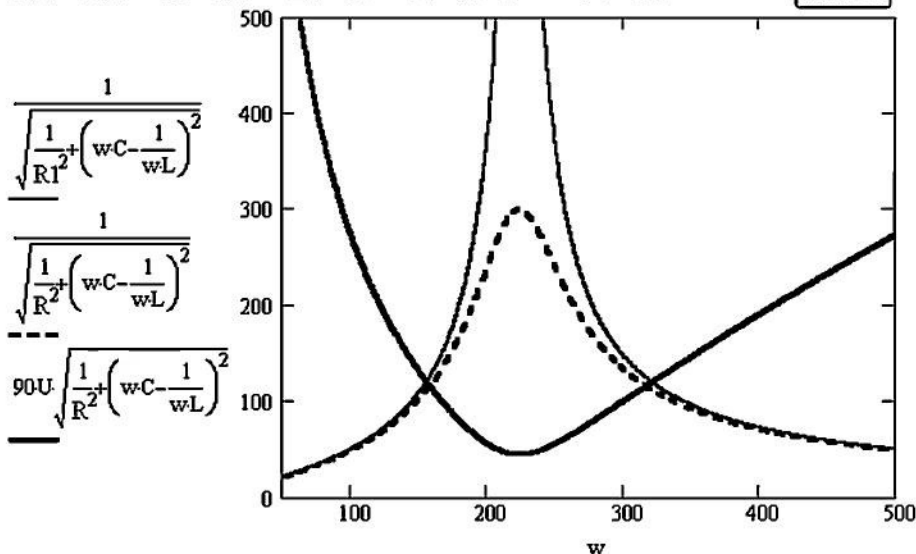
Полное сопротивление и ток в контуре:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{1/R^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2}}, \quad I = E \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

Графики построены в документе 07.mcd. Видно, что чем больше R тем острее максимум $Z = Z(\omega)$, выше добротность контура, ярче выражен резонанс.

R1 := 1000 R := 300 L := 0.4 C := 50 · 10⁻⁶ U := 150

07.mcd



Задача 2.4. Цепь состоит из источника переменной ЭДС и трех ветвей, в каждой из которых резистор, конденсатор и катушка индуктивности. Вторая и третья ветви соединены параллельно между собой, последовательно с ними включена первая ветвь (рис. 09.1). Рассчитайте все токи и напряжения, полную, активную и реактивную мощности. Постройте векторную диаграмму. Определите действующие значения всех токов и напряжений.

Импеданс k -ой ветви, содержащей последовательно соединенные резистор R_k , конденсатор C_k и катушку индуктивности L_k , равен:

$$\dot{Z}_k = R_k + j(\omega L_k - 1/\omega C_k), \quad j = \sqrt{-1}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Если ветви 2 и 3 соединены параллельно, а ветвь 1 — последовательно с ними, то импеданс цепи: $\dot{Z} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 \cdot \dot{Z}_3 / (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)$. Неизвестные токи и напряжения найдем из закона Ома:

$$\dot{I}_1 = \dot{E} / \dot{Z}, \quad \dot{U}_1 = \dot{I}_1 \dot{Z}_1, \quad \dot{U}_2 = \dot{U}_3 = \dot{E} - \dot{U}_1, \quad \dot{I}_2 = \dot{U}_2 / \dot{Z}_2, \quad \dot{I}_3 = \dot{U}_3 / \dot{Z}_3.$$

Это позволяет построить векторную диаграмму цепи (рис. 09.2), рассчитать комплекс полной мощности. (документ 08.mcd). Видно, что $\dot{E} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$, $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$.

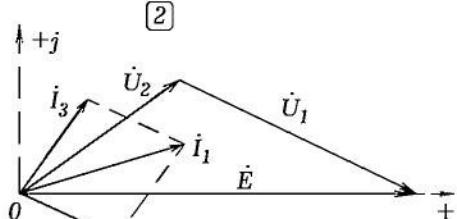
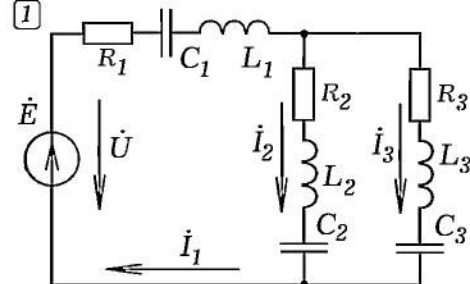


Рис.09

08.mcd

$$\begin{aligned} r1 &:= 10 & C1 &:= 1200 \cdot 10^{-6} \\ r2 &:= 8 & C2 &:= 1500 \cdot 10^{-6} \\ r3 &:= 14 & C3 &:= 1270 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L1 &:= 0.08 & i &:= \sqrt{-1} \\ L2 &:= 0.42 & w &:= 60 \\ L3 &:= 0.14 & E &:= 127 \end{aligned}$$

$$z1 := r1 + i \cdot \left(w \cdot L1 - \frac{1}{w \cdot C1} \right)$$

$$z1 = 10 - 9.089i \quad |z1| = 13.513$$

$$z2 := r2 + i \cdot \left(w \cdot L2 - \frac{1}{w \cdot C2} \right)$$

$$z2 = 8 + 14.089i \quad |z2| = 16.202$$

$$z3 := r3 + i \cdot \left(w \cdot L3 - \frac{1}{w \cdot C3} \right)$$

$$z3 = 14 - 4.723i \quad |z3| = 14.775$$

$$z23 := \frac{z2 \cdot z3}{z2 + z3} \quad z := z1 + z23 \quad z = 19.483 - 5.878i \quad |z| = 20.35$$

$$I1 := \frac{E}{z} \quad U1 := I1 \cdot z1 \quad U2 := E - U1 \quad I2 := \frac{U2}{z2} \quad I3 := \frac{U2}{z3}$$

$$U1 = 76.131 - 36.279i \quad U2 = 50.869 + 36.279i$$

$$I1 = 5.975 + 1.803i \quad I2 = 3.498 - 1.625i \quad I3 = 2.477 + 3.427i$$

$$S := E \cdot (\text{Re}(I1) - i \cdot \text{Im}(I1)) \quad S = 758.797 - 228.919i \quad I2 + I3 = 5.975 + 1.803i$$

Задача 2.5. Рассчитайте цепь, содержащую два источника переменной ЭДС, работающих с частотой f и сдвигом фаз φ (рис. 10.1). Постройте векторную диаграмму для одного из контуров. Определите показания ваттметра и фазометра.

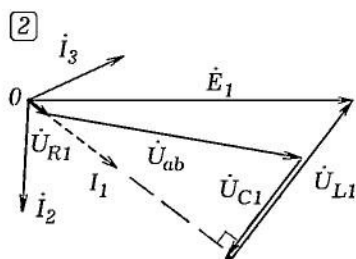
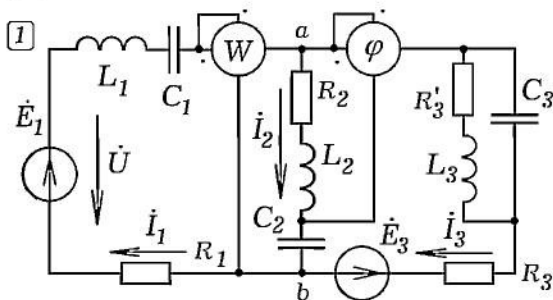


Рис.10

Решим задачу методом Кирхгофа. Импедансы ветвей и всей цепи:

$$\dot{Z}_1 = R_1 + j(\omega L_1 - 1/\omega C_1), \quad \dot{Z}_2 = R_2 + j(\omega L_2 - 1/\omega C_2),$$

$$\dot{Z}_3 = R_3 + \frac{(R'_3 + j\omega L_3)(-j/\omega C_3)}{R'_3 + j\omega L_3 - j/\omega C_3}.$$

Из законов Кирхгофа следует: $\dot{Z}_1 \dot{I}_1 + \dot{Z}_2 \dot{I}_2 + 0 \dot{I}_3 = \dot{E}_1$, $0 \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \dot{Z}_2 - \dot{I}_3 \dot{Z}_3 = \dot{E}_3$, $\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0$. Решение этой системы — в документе 09.mcd. Комплексы токов $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$, $\dot{I}_3$, равны элементам ТОК_0 , ТОК_1 , ТОК_2 , матрицы ТОК .

Комплекс полной мощности источника находится как произведение $\dot{E}$ на величину, комплексно сопряженную с током $\dot{I}$: $\dot{S} = \dot{E} \dot{I}^*$. Показания ваттметра равны действительной части от произведения напряжения на вольтовой обмотке $\dot{U}_{ab}$ на величину $\dot{I}_1^*$ комплексно сопряженную с током $\dot{I}_1$ через токовую обмотку: $P_w = \text{Re}\{\dot{U}_{ab}(\text{Re}\{\dot{I}_1\} - j \text{Im}\{\dot{I}_1\})\}$. С целью проверки правильности расчета цепи напряжение $\dot{U}_{ab}$ найдено двумя способами: $\dot{U}_{ab} = \dot{E}_1 - \dot{I}_1 \dot{Z}_1$, $\dot{U}_{ab} = \dot{I}_2 \dot{Z}_2$. Фазометр показывает разность фаз $\Delta\varphi$ между напряжением $\dot{U}' = \dot{I}_2(r_2 + j\omega L_2) = U' e^{j\varphi_1}$, поданным на вольтовую обмотку и током $\dot{I}_3 = I_3 e^{j\varphi_2}$ через токовую обмотку. Для определения $\Delta\varphi$ находят аргументы этих комплексных величин и вычисляют разность $\varphi_2 - \varphi_1$. Векторная диаграмма — на рис. 10.2.

$$\begin{aligned} i &:= \sqrt{-1} \quad w := 2 \cdot \pi \cdot 60 \quad r3 := 3 \quad i^{\frac{\pi}{4}} \quad \boxed{09.mcd} \\ r1 &:= 6 \quad L1 := 0.13 \quad C1 := 87 \cdot 10^{-6} \quad E3 := 60 \cdot e^{\frac{\pi}{4}} \quad E1 := 100 \\ r2 &:= 8 \quad L2 := 0.23 \quad C2 := 125 \cdot 10^{-6} \quad r3 := 9 \quad L3 := 0.32 \quad C3 := 68 \cdot 10^{-6} \\ z1 &:= r1 + i \cdot \left(w \cdot L1 - \frac{1}{w \cdot C1} \right) \quad z3 := r3 + \frac{(r3 + i \cdot w \cdot L3) \cdot \frac{-i}{w \cdot C3}}{(r3 + i \cdot w \cdot L3) + \frac{-i}{w \cdot C3}} \\ z2 &:= r2 + i \cdot \left(w \cdot L2 - \frac{1}{w \cdot C2} \right) \\ A &:= \begin{pmatrix} z1 & z2 & 0 \\ 0 & z2 & -z3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} E1 \\ E3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ТОК} := A^{-1} \cdot B \\ |\text{ТОК}_0| &= 1.249 \quad \text{ТОК} = \begin{pmatrix} 0.995 - 0.755i \\ -0.062 - 1.23i \\ 1.057 + 0.475i \end{pmatrix} \\ |\text{ТОК}_1| &= 1.232 \quad |\text{ТОК}_2| = 1.159 \\ S &:= E1 \cdot (\text{Re}(\text{ТОК}_0) - i \cdot \text{Im}(\text{ТОК}_0)) + E3 \cdot (\text{Re}(\text{ТОК}_2) - i \cdot \text{Im}(\text{ТОК}_2)) \\ S &= 164.557 + 100.176i \quad Uab := E1 - \text{ТОК}_0 \cdot z1 \quad Uab = 80.05 - 13.905i \\ Uab1 &:= \text{ТОК}_1 \cdot z2 \quad Uab1 = 80.05 - 13.905i \\ Pw &:= \text{Re}[Uab \cdot (\text{Re}(\text{ТОК}_0) - i \cdot \text{Im}(\text{ТОК}_0))] \quad Pw = 90.172 \\ f1 &:= \arg[\text{ТОК}_1 \cdot (r2 + i \cdot w \cdot L2)] \quad f1 = -0.142 \quad f2 := \arg(\text{ТОК}_2) \\ f2 &= 0.422 \quad df := f2 - f1 \quad df = 0.565 \end{aligned}$$

Трехфазная система — совокупность трех однофазных цепей, в которой действуют три источника, вырабатывающие переменные ЭДС равной амплитуды и частоты со сдвигом фаз $120^\circ = 2\pi/3$: $e_1(t) = E_m \sin \omega t$, $e_2(t) = E_m \sin(\omega t + 2\pi/3)$, $e_3(t) = E_m \sin(\omega t - 2\pi/3)$, или в комплексном виде $\dot{E}_1 = E e^{j\omega t}$, $\dot{E}_2 = E e^{j(\omega t + 2\pi/3)}$, $\dot{E}_3 = E e^{j(\omega t - 2\pi/3)}$.

При соединении звездой начала фаз генератора (концы фаз нагрузки) соединены в одной точке. При соединении треугольником фазы генератора (нагрузки) соединены последовательно друг за другом, причем конец одной фазы соединен с началом следующей. Универсальным методом расчета цепей является метод Кирхгофа, заключающийся в составлении системы комплексных уравнений и ее решения вручную или на ЭВМ.

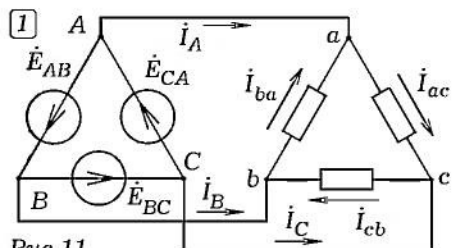
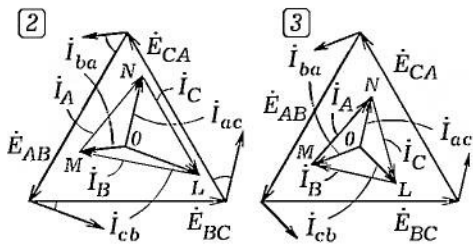


Рис.11



1. Соединение треугольником. Рассмотрим трехпроводную трехфазную систему, в которой обмотки генератора и нагрузки соединены треугольником (рис. 11.1). В каждой фазе действуют ЭДС: $\dot{E}_{AB} = E e^{j\omega t}$, $\dot{E}_B = E e^{j(\omega t + 2\pi/3)}$, $\dot{E}_{CA} = E e^{j(\omega t - 2\pi/3)}$, или $\dot{E}_{AB} = E$, $\dot{E}_{BC} = E e^{j2\pi/3}$, $\dot{E}_{CA} = E e^{-j2\pi/3}$. Провода Аа, Вб, Сс, соединяющие концы фаз генератора с фазами приемника, называются линейными, а напряжение между ними — линейным напряжением. При соединении треугольником линейное напряжение равно фазному.

По второму закону Кирхгофа для контуров АВба, ВСбс, САас $\dot{I}_{ba} = \dot{E}_{AB}/\dot{Z}_{ba}$, $\dot{I}_{ac} = \dot{E}_{CA}/\dot{Z}_{ac}$, $\dot{I}_{cb} = \dot{E}_{BC}/\dot{Z}_{cb}$, где $\dot{Z}_{ba}$, $\dot{Z}_{ac}$, $\dot{Z}_{cb}$ — импедансы фаз нагрузки. Линейные токи найдем из первого закона Кирхгофа для узлов а, б, с:

$$\begin{aligned} I_A + I_{ba} &= I_{ac}, & I_B + I_{cb} &= I_{ba}, & I_C + I_{ac} &= I_{cb}, \\ I_A &= I_{ac} - I_{ba}, & I_B &= I_{ba} - I_{cb}, & I_C &= I_{cb} - I_{ac}. \end{aligned}$$

При построении векторной диаграммы комплексы действующих значений ЭДС фаз генератора, линейных и фазных токов откладывают на комплексной плоскости (рис. 11.2). Вектора $\dot{E}_{AB}$, $\dot{E}_{BC}$, $\dot{E}_{CA}$ следуют друг за другом, образуя равносторонний треугольник. Из его центра О откладывают фазные токи $\dot{I}_{ac}$, $\dot{I}_{cb}$, $\dot{I}_{ba}$, строя вектора линейных токов $\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$, $\dot{I}_C$, которые образуют треугольник МNL. Если нагрузка симметричная ($\dot{Z}_{ba} = \dot{Z}_{ac} = \dot{Z}_{cb} = \dot{Z}$), то фазные токи:

$$\dot{I}_{ba} = \frac{\dot{E}_{AB}}{\dot{Z}} = I e^{j\varphi}, \quad \dot{I}_{cb} = \frac{\dot{E}_{BC}}{\dot{Z}} = I e^{j(2\pi/3 + \varphi)}, \quad \dot{I}_{ac} = \frac{\dot{E}_{CA}}{\dot{Z}} = I e^{j(-2\pi/3 + \varphi)}.$$

Они равны по величине и сдвинуты относительно друг друга на $2\pi/3$. Линейные токи, как видно из векторной диаграммы (рис. 11.3), образуют равносторонний треугольник и в $\sqrt{3}$ раз больше фазных. В самом деле:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{ac} - \dot{I}_{ba} = I e^{j(-2\pi/3 + \varphi)} - I e^{j\varphi} = I e^{j\varphi} (\cos(-2\pi/3) + j \sin(-2\pi/3) - 1) = \\ &= \dot{I}_{ba} (-1/2 - j\sqrt{3}/2 - 1) = \sqrt{3} \dot{I}_{ba} (-\sqrt{3}/2 - j/2) = \sqrt{3} \dot{I}_{ba} e^{j5\pi/6}. \\ \dot{I}_A &= \sqrt{3} \dot{I}_{ba} e^{j5\pi/6}, \quad \dot{I}_B = \sqrt{3} \dot{I}_{cb} e^{j5\pi/6}, \quad \dot{I}_C = \sqrt{3} \dot{I}_{ac} e^{j5\pi/6}. \end{aligned}$$

2. Соединение звездой. Рассмотрим четырехпроводную трехфазную цепь: фазы генератора и нагрузки соединены звездой, причем имеется нейтраль, соединяющая начала фаз генератора О с концами фаз нагрузки О' (рис. 12.1). Линейными являются провода Аа, Вв, Сс, соединяющие концы фаз генератора с началом фаз нагрузки. Линейные токи равны фазным.

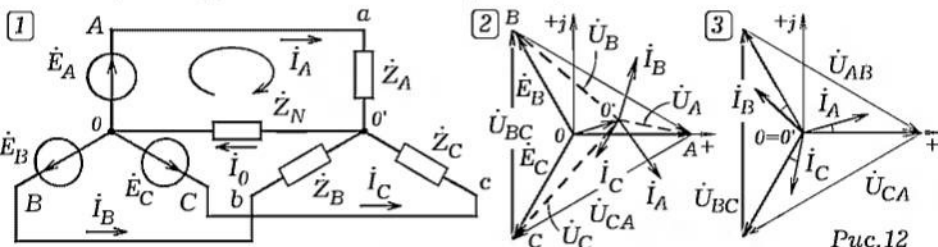


Рис. 12

Пусть импедансы фаз $\dot{Z}_A, \dot{Z}_B, \dot{Z}_C$, импеданс нейтрали $\dot{Z}_N$. Из второго закона Кирхгофа для контуров ОАаО', ОВвО', ОСсО': $\dot{E}_A = \dot{I}_A \dot{Z}_A + \dot{I}_N \dot{Z}_N = \dot{I}_A \dot{Z}_A + \dot{U}_N$, $\dot{I}_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_N) / \dot{Z}_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_N) \dot{Y}_A$, где $\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{U}_N$ — напряжение на фазе А нагрузки. Найдем остальные линейные токи (равные фазным): $\dot{I}_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_N) \dot{Y}_B = \dot{U}_B \dot{Y}_B$, $\dot{I}_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_N) \dot{Y}_C = \dot{U}_C \dot{Y}_C$, где $\dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{U}_N$, $\dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{U}_N$, — фазные напряжения. Так как $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = \dot{I}_N = \dot{U}_N \dot{Y}_N$, то $(\dot{E}_A - \dot{U}_N) \dot{Y}_A + (\dot{E}_B - \dot{U}_N) \dot{Y}_B + (\dot{E}_C - \dot{U}_N) \dot{Y}_C = \dot{U}_N \dot{Y}_N$,

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{Y}_A \dot{E}_A + \dot{Y}_B \dot{E}_B + \dot{Y}_C \dot{E}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C + \dot{Y}_N}.$$

Расчет цепи сводится к вычислению проводимостей $\dot{Y}_A, \dot{Y}_B, \dot{Y}_C, \dot{Y}_N$, нахождению комплекса действующего значения напряжения на нейтрали $\dot{U}_N$ и определению комплексов токов по формулам:

$$\dot{I}_A = (\dot{E}_A - \dot{U}_N) \dot{Y}_A, \quad \dot{I}_B = (\dot{E}_B - \dot{U}_N) \dot{Y}_B, \quad \dot{I}_C = (\dot{E}_C - \dot{U}_N) \dot{Y}_C.$$

На векторной диаграмме вектора $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ откладывают от точки О, потенциал которой считается равным 0 (рис. 12.2). Линейные напряжения $\dot{U}_{AB} = \dot{E}_A - \dot{E}_B$, $\dot{U}_{BC} = \dot{E}_B - \dot{E}_C$, $\dot{U}_{CA} = \dot{E}_C - \dot{E}_A$ на векторной диаграмме образуют равносторонний треугольник и по модулю в $\sqrt{3}$ раз больше фазных. Строят вектор $\dot{U}_N = \vec{OO'}$, соответствующий напряжению $\dot{U}_N$ на нейтрали ОО'. От точки О' откладывают вектора напряжений $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$ на фазах нагрузки, а также линейные токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$, которые равны фазным. Ток в нейтрали равен сумме всех линейных (фазных) токов.

1. При отсутствии нейтрали можно считать, что ее импеданс бесконечно велик, а проводимость равна 0. В этом случае:

$$\dot{U}_N = \frac{\dot{Y}_A \dot{E}_A + \dot{Y}_B \dot{E}_B + \dot{Y}_C \dot{E}_C}{\dot{Y}_A + \dot{Y}_B + \dot{Y}_C}, \quad \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

2. Если impedance нейтральной линии равен 0, то ее проводимость $\dot{Y}_N$ бесконечно велика, напряжение на нейтрали $\dot{U}_N = 0$, точки O и O' на векторной диаграмме совпадают. Напряжения на фазах нагрузки равны фазным ЭДС: $\dot{U}_A = \dot{E}_A$, $\dot{U}_B = \dot{E}_B$, $\dot{U}_C = \dot{E}_C$. Линейные токи (равные фазным): $\dot{I}_A = \dot{E}_A \dot{Y}_A$, $\dot{I}_B = \dot{E}_B \dot{Y}_B$, $\dot{I}_C = \dot{E}_C \dot{Y}_C$.

3. В случае когда нагрузка симметричная $\dot{Y}_A = \dot{Y}_B = \dot{Y}_C = \dot{Y}$, напряжение на нейтрали $\dot{U}_N = \dot{Y}(\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C)/(3\dot{Y} + \dot{Y}_N) = 0$ (так как $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$). Точки O и O' на векторной диаграмме совпадают (рис. 12.3). Напряжения на фазах нагрузки и генератора равны: $\dot{U}_A = \dot{E}_A$, $\dot{U}_B = \dot{E}_B$, $\dot{U}_C = \dot{E}_C$. Линейные токи: $\dot{I}_A = \dot{E}_A \dot{Y} = I e^{j\varphi}$, $\dot{I}_B = \dot{E}_B \dot{Y} = I e^{j(\varphi+2\pi/3)}$, $\dot{I}_C = \dot{E}_C \dot{Y} = I e^{j(\varphi-2\pi/3)}$. Они имеют равные величины и сдвинуты относительно друг друга на угол $2\pi/3$. Ток в нейтрали равен 0:

$$\begin{aligned}\dot{I}_N &= \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = I e^{j\varphi} + I e^{j(\varphi+2\pi/3)} + I e^{j(\varphi-2\pi/3)} = \\ &= I e^{j\varphi}(1 + \cos(2\pi/3) + j \sin(2\pi/3) + \cos(-2\pi/3) + j \sin(-2\pi/3)) = \\ &= I e^{j\varphi}(1 - 0,5 + 0,87j - 0,5 - 0,87j) = 0.\end{aligned}$$

3. Мощность трехфазной цепи. Для нахождения комплекса полной мощности трехфазной цепи необходимо определить мощность каждой фазы по отдельности, а затем их сложить: $\dot{S} = \dot{U}_1 \dot{I}_1^* + \dot{U}_2 \dot{I}_2^* + \dot{U}_3 \dot{I}_3^*$. Активная и реактивная мощности соответственно равны: $P = \operatorname{Re}\{\dot{S}\}$, $Q = \operatorname{Im}\{\dot{S}\}$.

Если нагрузка симметричная, то полная мощность $S = S_1 + S_2 + S_3 = 3S_1 = 3U_\phi I_\phi$. При соединении треугольником: $U_n = U_\phi$, $I_n = \sqrt{3}I_\phi$, а при соединении звездой: $U_n = \sqrt{3}U_\phi$, $I_n = I_\phi$. Поэтому полная мощность $S = 3U_\phi I_\phi = \sqrt{3}U_n I_n$, активная и реактивная мощности равны: $P = \sqrt{3}U_n I_n \cos \varphi_\phi$, $Q = \sqrt{3}U_n I_n \sin \varphi_\phi$, где φ_ϕ — сдвиг фаз между фазными током I_ϕ и напряжением U_ϕ .

Задача 3.1. Имеется четырехпроводная трехфазная цепь с несимметричной нагрузкой (рис. 13). Определите комплексы токов во всех ветвях и их модули, вычислите мощность. Постройте векторную диаграмму.

Решим задачу методом Кирхгофа. Цепь имеет три независимых контура и два узла O и O', всего 4 ветви. Составим систему из 4 независимых уравнений:

$$\begin{aligned}-\dot{I}_0 + \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C &= 0, & 10\dot{I}_0 + 100\dot{I}_A &= \dot{E}_A, \\ 10\dot{I}_0 - 120j\dot{I}_B &= \dot{E}_B, & 10\dot{I}_0 + 80j\dot{I}_C &= \dot{E}_C.\end{aligned}$$

Рис. 13

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 100 & 0 & 0 & 220 \\ 10 & 0 & -120j & 0 & 220e^{120^\circ j} \\ 10 & 0 & 0 & 80j & 220e^{-120^\circ j} \end{pmatrix}.$$

Для ее решения создают две матрицы Z и E , затем получают третью матрицу $I := Z^{-1} \cdot E$, элементами которой являются комплексы токов $\dot{I}_N = \dot{I}_0$, $\dot{I}_A = \dot{I}_1$, $\dot{I}_B = \dot{I}_2$, $\dot{I}_C = \dot{I}_3$ (документ 10-1.mcd). Модули этих величин равны действу-

Ющим значениям токов. На рис. 14.1 изображена векторная диаграмма. Вторым способом расчета цепи предусматривает вычисления напряжения $\dot{U}_N$ между концами нейтральной (документ 10-2.mcd).

$$\begin{aligned}
 i &:= \sqrt{-1} \quad Z_A := 100 \quad Z_B := -120i \\
 Z_C &:= 80 \cdot i \\
 Z_N &:= 10 \\
 Z &:= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ Z_N & Z_A & 0 & 0 \\ Z_N & 0 & Z_B & 0 \\ Z_N & 0 & 0 & Z_C \end{pmatrix} \quad E := \begin{pmatrix} 0 \\ 220 \\ 220 \cdot e^{i2\frac{\pi}{3}} \\ 220 \cdot e^{-i2\frac{\pi}{3}} \end{pmatrix} \quad I := Z^{-1} \cdot E \\
 I &= \begin{pmatrix} -1.622 + 0.355i \\ 2.362 - 0.036i \\ -1.558 - 0.782i \\ -2.426 + 1.172i \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} |I_0| &= 1.66 & |I_2| &= 1.743 \\ |I_1| &= 2.362 & |I_3| &= 2.694 \end{aligned} \\
 P &:= 100 \cdot (|I_1|)^2 + 10 \cdot (|I_0|)^2 \quad P = 585.687
 \end{aligned}$$

10-1.mcd

$$\begin{aligned}
 i &:= \sqrt{-1} \quad R := 100 \quad R_n := 10 \quad X_C := -120 \cdot i \quad X_L := 80 \cdot i \\
 E_a &:= 220 \quad E_b := 220 \cdot e^{2i\frac{\pi}{3}} \quad E_c := 220 \cdot e^{-2i\frac{\pi}{3}} \quad Y_a := \frac{1}{R} \quad Y_n := \frac{1}{R_n} \\
 Y_b &:= \frac{1}{X_C} \quad Y_c := \frac{1}{X_L} \quad U_n := \frac{E_a \cdot Y_a + E_b \cdot Y_b + E_c \cdot Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c + Y_n} \\
 I_a &:= Y_a \cdot (E_a - U_n) \quad I_a = 2.362 - 0.036i \quad |I_a| = 2.362 \\
 I_b &:= Y_b \cdot (E_b - U_n) \quad I_b = -1.558 - 0.782i \quad |I_b| = 1.743 \\
 I_c &:= Y_c \cdot (E_c - U_n) \quad I_c = -2.426 + 1.172i \quad |I_c| = 2.694 \\
 I_n &:= Y_n \cdot U_n \quad I_n = -1.622 + 0.355i \quad |I_n| = 1.66 \\
 U_n &= -16.219 + 3.552i \quad S_a := E_a \cdot (\text{Re}(I_a) - i \cdot \text{Im}(I_a)) \quad S_a = 519.682 + 7.815i
 \end{aligned}$$

10-2.mcd

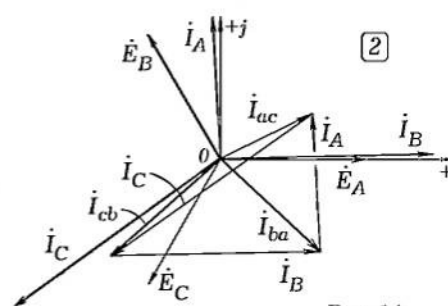
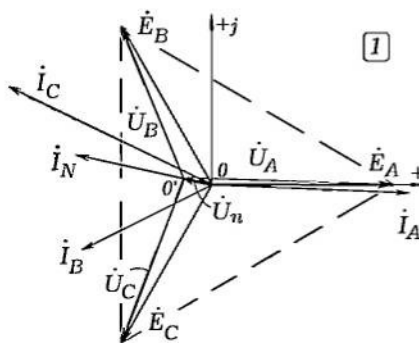


Рис. 14

Задача 3.2. Обмотки трехфазного генератора соединены звездой (треугольником), к ним подключена нагрузка, фазы которой соединены треугольником (рис. 15). Линейные провода Aa, Bb, Cc содержат конденсатор, катушку индуктивности и резистор соответственно. Рассчитайте цепь, постройте векторную диаграмму.

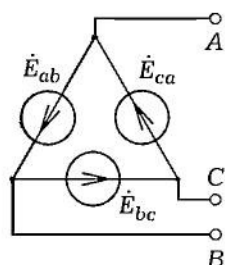
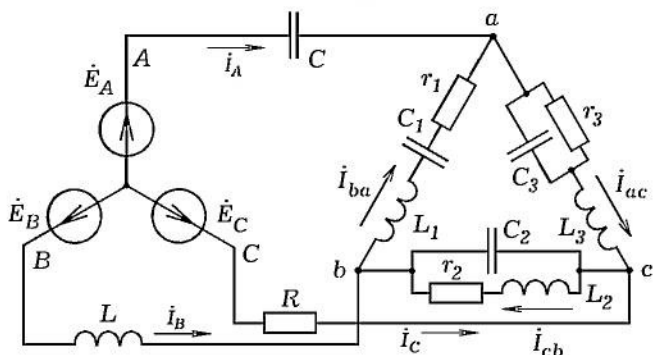


Рис.15



Запишем первый и второй законы Кирхгофа для контуров AabB, BbcC, CcaA и узлов a, b, c:

$$\dot{X}_C \dot{I}_A - \dot{X}_L \dot{I}_B - \dot{Z}_1 \dot{I}_{ba} = \dot{E}_A - \dot{E}_B = -\dot{E}_{ab}, \quad I_A - I_{ac} + I_{ba} = 0,$$

$$\dot{X}_L \dot{I}_B - \dot{R} \dot{I}_C - \dot{Z}_2 \dot{I}_{cb} = \dot{E}_B - \dot{E}_C = -\dot{E}_{bc}, \quad I_B - I_{ba} + I_{cb} = 0,$$

$$\dot{R} \dot{I}_C - \dot{X}_C \dot{I}_A - \dot{Z}_3 \dot{I}_{ac} = \dot{E}_C - \dot{E}_A = -\dot{E}_{ca}, \quad I_C - I_{cb} + I_{ac} = 0.$$

Для решения этой системы из 6 уравнений следует составить матрицу импедансов и матрицу контурных ЭДС (документ 11.mcd). Векторная диаграмма изображена на рис. 14.2. Так как $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$, то на комплексной плоскости вектора линейных токов образуют треугольник, вершинами которого являются концы векторов фазных токов $\dot{I}_{ba}, \dot{I}_{cb}, \dot{I}_{ac}$.

$$i := \sqrt{-1} \quad w := 2 \cdot \pi \cdot 50 \quad R := 6 \quad L := 0.13 \quad C := 10 \cdot 10^{-6}$$

$$E_a := 220 \quad r_1 := 4 \quad L_1 := 0.18 \quad C_1 := 64 \cdot 10^{-6}$$

$$E_b := 220 \cdot e^{2i \frac{\pi}{3}} \quad r_2 := 8 \quad L_2 := 0.08 \quad C_2 := 56 \cdot 10^{-6}$$

$$E_c := 220 \cdot e^{-2i \frac{\pi}{3}} \quad r_3 := 12 \quad L_3 := 0.21 \quad C_3 := 36 \cdot 10^{-6}$$

$$X_C := \frac{-i}{w \cdot C} \quad X_L := i \cdot w \cdot L$$

$$z_1 := r_1 + i \cdot \left(w \cdot L_1 - \frac{1}{w \cdot C_1} \right) \quad z_3 := i \cdot w \cdot L_3 + \frac{r_3 \cdot \frac{-i}{w \cdot C_3}}{r_3 + \frac{-i}{w \cdot C_3}}$$

$$z_2 := \frac{\frac{-i}{w \cdot C_2} \cdot (r_2 + i \cdot w \cdot L_2)}{\frac{-i}{w \cdot C_2} + (r_2 + i \cdot w \cdot L_2)}$$

11.mcd

$$Z := \begin{bmatrix} XC & -XL & 0 & -z1 & 0 & 0 \\ 0 & XL & -R & 0 & 0 & -z2 \\ -XC & 0 & R & 0 & -z3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E := \begin{bmatrix} Ea - Eb \\ Eb - Ec \\ Ec - Ea \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$TOK := Z^{-1} \cdot E$$

$$\begin{aligned} |TOK_0| &= 3.299 & |TOK_3| &= 3.163 & TOK &= \\ |TOK_1| &= 4.965 & |TOK_4| &= 2.418 & \\ |TOK_2| &= 5.869 & |TOK_5| &= 3.485 & \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} -0.182 + 3.294i \\ 4.964 + 0.11i \\ -4.781 - 3.403i \\ 2.316 - 2.155i \\ 2.133 + 1.139i \\ -2.648 - 2.265i \end{bmatrix}$$

Задача 3.3. Фазоуказатель состоит из конденсатора и двух одинаковых лампочек, соединенных звездой без нейтрали (рис. 16.1). Какая из лампочек будет гореть ярче, если конденсатор находится в фазе А?

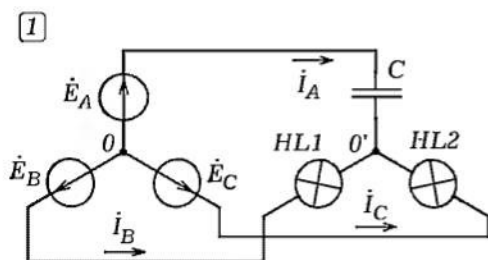
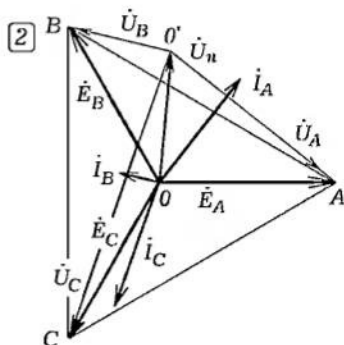


Рис.16



Определим напряжение $\dot{U}_N$ на нейтрали между точками OO' и вычислим линейные (фазные) токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ по известным формулам (документ 12.mcd). Найдём их модули, равные действующим значениям и вычислим активные мощности, выделяющиеся на каждой лампе. На комплексной плоскости (рис. 16.2) построим фазные ЭДС и линейные напряжения, получив равносторонний треугольник A, B, C . Отложим вектор OO' , соответствующий напряжению на нейтрали $\dot{U}_N$, затем точку O' соединим с точками A, B, C , получая вектора $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$. Вектора $\dot{I}_B$ и $\dot{I}_C$ оказываются параллельны $\dot{U}_B$ и $\dot{U}_C$ (нагрузка активная), а вектор тока $\dot{I}_A$ опережает вектор напряжения $\dot{U}_A$ на $\pi/2$ (емкостная нагрузка). Так как $P_2 > P_1$ (12.mcd), ярче горит лампа HL2 в фазе C, что и позволяет определить последовательность фаз.

$$i := \sqrt{-1} \quad w := 2 \cdot \pi \cdot 50 \quad r := 100 \quad C := 50 \cdot 10^{-6} \quad \boxed{12.mcd}$$

$$\begin{aligned} E_a &:= 220 \quad 2i \frac{\pi}{3} & E_c &:= 220 \cdot e^{-2i \frac{\pi}{3}} & X_C &:= \frac{-i}{w \cdot C} & Y_a &:= \frac{1}{X_C} \\ E_b &:= 220 \cdot e & & & & & & \\ Y_b &:= \frac{1}{r} & Y_c &:= Y_b & Y_a = 0.016i & & & \\ & & & & Y_b = 0.01 & & & \\ U_n &:= \frac{E_a \cdot Y_a + E_b \cdot Y_b + E_c \cdot Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} \end{aligned}$$

$$U_n = 15.899 + 160.3i$$

$$I_a := Y_a \cdot (E_a - U_n) \quad I_a = 2.518 + 3.206i \quad |I_a| = 4.077$$

$$I_b := Y_b \cdot (E_b - U_n) \quad I_b = -1.259 + 0.302i \quad |I_b| = 1.295$$

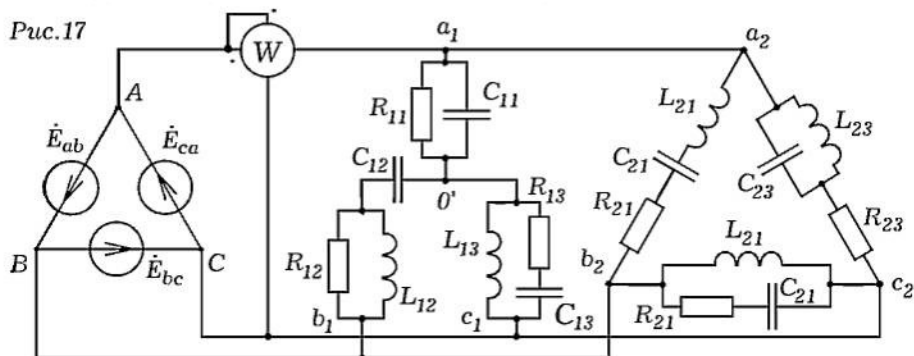
$$I_c := Y_c \cdot (E_c - U_n) \quad I_c = -1.259 - 3.508i \quad |I_c| = 3.727$$

$$P1 := (|I_b|)^2 \cdot r \quad P1 = 167.643 \quad P2 := (|I_c|)^2 \cdot r \quad P2 = 1.389 \times 10^3$$

■ **Задача 3.4.** Рассчитайте четырехпроводную трехфазную цепь с несимметричной нагрузкой, каждая фаза которой содержит резистор, конденсатор, катушку индуктивности, соединенные смешанно.

■ **Задача 3.5.** Рассчитайте трехфазную цепь с несимметричной нагрузкой, соединенной треугольником. Каждая фаза нагрузки содержит резистор, конденсатор, катушку индуктивности, соединенные смешанно.

■ **Задача 3.6.** Обмотки трехфазного генератора соединены треугольником, к ним подключены две несимметричные трехфазные нагрузки, соединенные звездой и треугольником (рис. 17). С помощью системы MathCAD рассчитайте все линейные и фазные токи и напряжения, полную, активную и реактивную мощности для заданных параметров цепи. Постройте векторные диаграммы: а) для первой нагрузки; б) для второй нагрузки; в) для линейных токов и фазных токов обеих нагрузок. Определите показания ваттметра.



Переходным называется процесс перехода системы из одного устойчивого состояния в другое (аварийные и штатные включения и выключения). При этом выполняются законы коммутации: 1. Ток через катушку индуктивности не может измениться скачком на конечную величину: сразу после коммутации он имеет то же значение, что и непосредственно до коммутации. 2. Напряжение на конденсаторе не может измениться скачком: его значение до коммутации сохраняется в первый момент после коммутации.

Рассмотрим последовательный колебательный контур, подключаемый к источнику ЭДС (рис. 18.4). Запишем второй закон Кирхгофа для мгновенных токов:

$$u_R + u_L + u_C = e(t), \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = e(t).$$

Будем считать, что ток i переходного процесса равен сумме принужденного i_{np} и свободного $i_{св}$ токов: $i = i_{np} + i_{св}$, которые являются решениями неоднородного и однородного дифференциальных уравнений:

$$Ri_{np} + L \frac{di_{np}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{np} dt = e(t), \quad Ri_{св} + L \frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{C} \int i_{св} dt = 0.$$

Общее решение однородного дифференциального уравнения соответствует свободному току, зависящему от параметров цепи R, L, C и независящему от ЭДС $e(t)$. Частное решение неоднородного дифференциального уравнения, зависящее от параметров R, L, C и ЭДС $e(t)$, соответствует принужденному току, который устанавливается в цепи при $t \rightarrow \infty$. Принужденный ток рассчитывается методами, рассмотренными в предыдущих разделах. Чтобы определить свободный ток необходимо решить однородное дифференциальное уравнение:

$$L \frac{d^2 i_{св}}{dt^2} + R \frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{C} i_{св} = 0.$$

Используя замену $\beta = R/(2L), \omega_0^2 = 1/(LC)$, получаем дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$i_{св}'' + 2\beta i_{св}' + \omega_0^2 i_{св} = 0.$$

Решение этого однородного дифференциального уравнения второго порядка будем искать в виде: $i_{св} = Ae^{pt}$. Осуществим подстановку и, сократив на Ae^{pt} , получим характеристическое уравнение: $p^2 + 2\beta p + \omega_0^2 = 0$. Найдем его корни:

$$p_{1,2} = 0,5 \cdot (-2\beta \pm \sqrt{4(\beta^2 - \omega_0^2)}) = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

1. **Сильное затухание:** $\beta > \omega_0$. Корни характеристического уравнения: $p_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$. Свободный ток равен:

$$i_{св}(t) = (Ae^{\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}t})e^{-\beta t}.$$

где A и B — константы, зависящие от начальных условий: тока через индуктивность и напряжения на емкости при $t = 0$. Движение аperiodическое, система возвращается в положение равновесия, не совершив полного колебания.

2. **Критический случай:** $\beta = \omega_0$. Корни характеристического уравнения совпадают: $p_1 = p_2 = -\beta$. Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний: $i_{св}(t) = Ae^{-\beta t}$.

3. Слабое затухание: $\beta < \omega_0$. Корни характеристического уравнения: $p_{1,2} = -\beta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm j\omega$, где $j = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ — частота затухающих колебаний. Воспользуемся уравнением Эйлера $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$. Свободный ток равен:
 $i_{\text{св}} = Ae^{-(\beta+j\omega)t} + Be^{-(\beta-j\omega)t} = (Ae^{-j\omega t} + Be^{j\omega t})e^{-\beta t}$, $i_{\text{св}} = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$. Система совершает колебания с частотой ω , амплитуда которых изменяется по экспоненциальному закону: $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$.

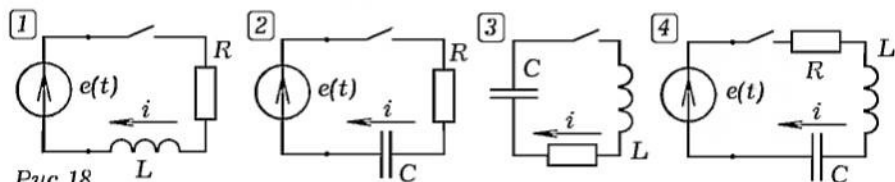


Рис.18

Задача 4.1. Последовательно соединенные резистор R и катушка индуктивности L в момент $t = 0$ подключаются к источнику постоянного напряжения (рис. 18.1). В начальный момент $t = 0$ ток через катушку индуктивности $i = i_0$. Определите значения тока и напряжения на катушке индуктивности в последующие моменты времени.

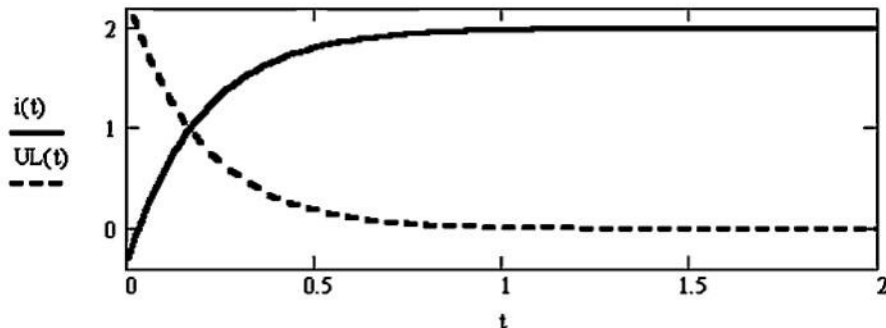
Решение дифференциального уравнения переходного процесса $Li' + Ri = e(t)$ представлено в документе 13.mcd. Из полученных графиков $i(t)$ и $u_L(t)$ видно, что при $t \rightarrow \infty$ ток плавно стремится к предельному значению $I = U/R$, а напряжение на катушке индуктивности — к нулю.

$R := 1$ $L := 0.2$ $E := 2$ Given

$$L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) = E$$

13.mcd

$i(0) = -0.3$ $i := \text{odesolve}(t, 2, 100)$ $t := 0, 0.02 \dots 2$ $UL(t) := E - i(t) \cdot R$



Задача 4.2. Колебательный контур содержит резистор R , конденсатор C , катушку индуктивности L , соединенные последовательно (рис. 18.3). Конденсатор зарядили и в момент $t = 0$ замкнули ключ. Исследуйте получающиеся затухающие колебания.

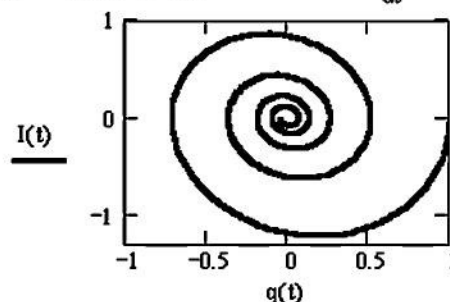
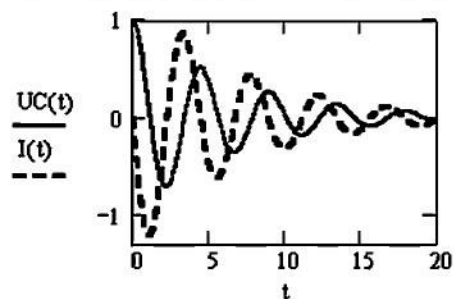
Переходный процесс описывается дифференциальным уравнением $L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0$. Начальные условия: $q_0 = 1$, $\dot{q} = 0$. В документе 14.mcd представлено

его решение и построены графики $q(t)$ и $i(t) = q'(t)$, а также фазовая кривая. Видно, что ток в цепи и заряд конденсатора, который пропорционален напряжению на его обкладках, совершают затухающие колебания, стремясь к нулю. Увеличивая сопротивление резистора, самостоятельно получите график $i(t)$ в случае сильного затухания.

Given

$$\frac{d^2}{dt^2}q(t) + 0.3 \frac{d}{dt}q(t) + 2 \cdot q(t) = 0 \quad q'(0) = 0 \quad q(0) = 1 \quad \boxed{14.mcd}$$

$q := \text{odesolve}(t, 20, 200) \quad t := 0, 0.05 \dots 20 \quad UC(t) := q(t) \quad I(t) := \frac{d}{dt}q(t)$



■ Задача 4.3. Цепь из последовательно соединенных резистора R и конденсатора C подключают к источнику переменного напряжения $e(t) = E_m \sin \omega t$ в момент, когда ЭДС равна 0 (рис. 18.2). Получите кривую тока $i(t)$.

Запишем уравнение переходного процесса:

$$Ri + (1/C) \int i dt = e(t), \quad R\dot{q} + q/C = e(t),$$

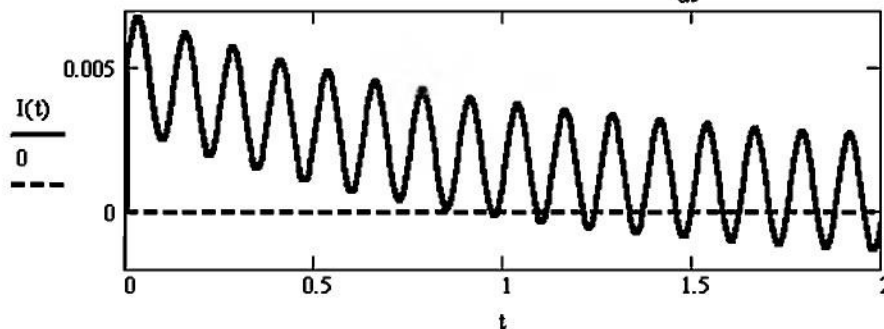
начальные условия: $q_0 = 0$. Решением является сумма свободного тока, уменьшающегося по экспоненте, и принужденного тока, колеблющегося по гармоническому закону (документ 15.mcd).

$R := 1000 \quad C := 1 \cdot 10^{-3} \quad E := 2 \quad w := 50$

Given

$$R \left(\frac{d}{dt}q(t) \right) + \frac{1}{C} \cdot q(t) = E \cdot \sin(w \cdot t) \quad q(0) = -0.005 \quad \boxed{15.mcd}$$

$q := \text{odesolve}(t, 2, 1000) \quad t := 0, 0.002 \dots 2 \quad I(t) := \frac{d}{dt}q(t)$



Задача 4.4. Цепь из последовательно соединенных резистора R , конденсатора C и катушки индуктивности L в момент $t = 0$ подключили к источнику переменного напряжения (рис. 18.4). В начальный момент конденсатор разряжен, ток через катушку индуктивности равен 0. Изучите переходный процесс.

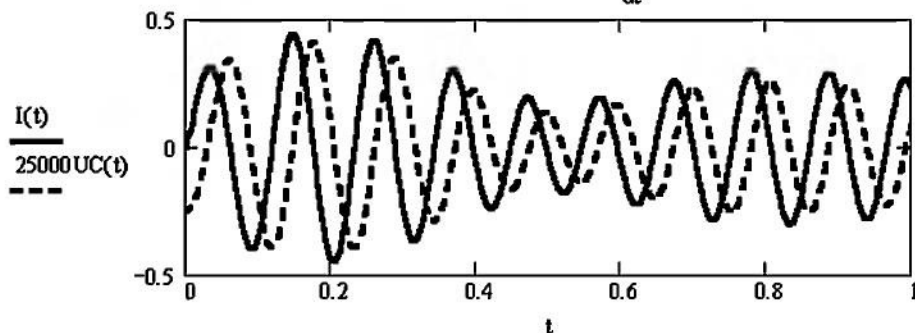
Запишем дифференциальное уравнение переходного процесса: $L\ddot{q} + r\dot{q} + q/C = E_m \sin(\omega t)$. Начальные условия: $q_0 = Cu_0 = -0.005$, $i_0 = \dot{q}_0 = 0$. Решение задачи представлено в документе 16.mcd. Из графика $i = i(t)$ следует, что при $t \rightarrow \infty$ кривая тока приближается к синусоиде (принужденный ток), свободный ток стремится к нулю.

$$R := 1 \quad L := 0.2 \quad C := 2 \cdot 10^{-3} \quad w0 := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad w0 = 50 \quad w := 60$$

16.mcd

Given $\frac{d^2}{dt^2} q(t) + \frac{R}{L} \left(\frac{d}{dt} q(t) \right) + \frac{1}{L \cdot C} \cdot q(t) = 5 \cdot \sin(w \cdot t) \quad q'(0) = 0 \quad q(0) = -0.005$

$q := \text{odesolve}(t, 2, 200) \quad t := 0, 0.001..2 \quad I(t) := \frac{d}{dt} q(t) \quad UC(t) := C \cdot q(t)$



5. АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Автоколебания — это незатухающие колебания, возникающие в нелинейной колебательной системе с положительной обратной связью, регулирующей поступление энергии от источника. Для их поддержания не требуется внешних периодических воздействий. Автоколебательная система состоит из колебательной системы, источника энергии, ключевого элемента и цепи обратной связи. Поступления энергии, компенсирующие неизбежные потери на нагревание, регулируется самой системой. Амплитуда и частота автоколебаний зависят от параметров системы и напряжения питания.

Генератор гармонических колебаний можно получить, соединив выход усилителя со входом цепью обратной связи. Для устойчивой работы автоколебательной системы необходимо выполнение двух условий: 1. Условие баланса амплитуд: произведение коэффициента усиления усилителя на коэффициент передачи положительной обратной связи равно 1 ($K(w, U_m)\beta(w) = 1$). 2. Условие баланса фаз: суммарный сдвиг фаз, вносимый усилителем и цепью обратной связи, кратен 2π : ($\varphi_y + \varphi_{oc} = 2\pi n$, $n=1, 2, 3, \dots$)

Различают системы с жестким возбуждением (для нарастания амплитуды колебаний необходим начальный толчок либо смещение из положения равновесия) и системы с мягким возбуждением (колебания увеличивают амплитуду из положения равновесия). В фазовом пространстве автоколебаниям соответствует устойчивый предельный цикл или аттрактор, — замкнутая траектория, к которой стремятся все фазовые кривые системы независимо от начальных условий.

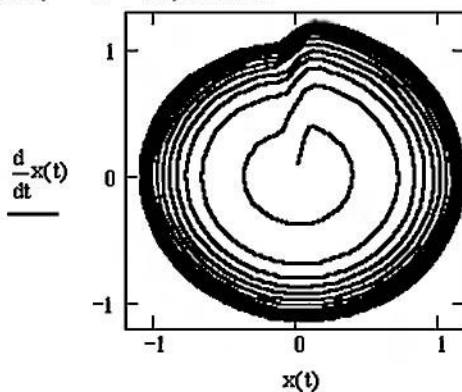
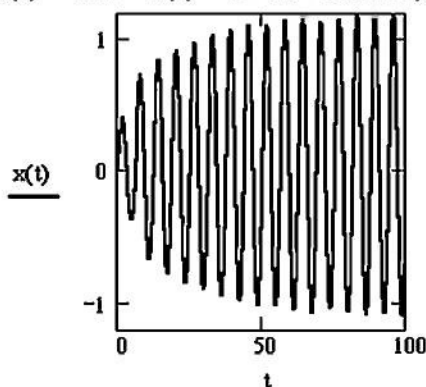
■ **Задача 5.1.** Автоколебательная система состоит из колебательного контура, усилительного элемента и цепи положительной обратной связи. При прохождении колебательной системой положения равновесия ей сообщается порция энергии. Исследуйте возникающие автоколебания.

$m := 1.1 \quad k := 1 \quad r := 0.05 \quad b := 1 \quad \text{Given}$

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + r \cdot \frac{d}{dt}x(t) + k \cdot x(t) - b \cdot \Phi(0.1 - |x(t)|) \cdot \Phi\left(\frac{d}{dt}x(t)\right) = 0$$

17.mcd

$x(0) = 0.01 \quad x'(0) = 0 \quad x := \text{odesolve}(t, 100) \quad t := 0.1, 0.2..100$



Воспользуемся электро-механической аналогией и рассмотрим колебательную систему, на которую при смещениях x в интервале $[-a; a]$ и движении в положительном направлении действует постоянная сила, равная F_m :

$$F(x) = \begin{cases} F_m, & \text{если } a - |x| \geq 0, \text{ и } \dot{x} \geq 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Силу можно записать иначе: $F(t) = F_m \cdot \Phi(a - |x(t)|) \cdot \Phi(\dot{x}(t))$, где

$$\Phi(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \geq 0, \\ 0, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

В этом случае уравнение автоколебаний принимает вид:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x = F_m \cdot \Phi(a - |x|) \cdot \Phi(\dot{x}).$$

Это уравнение решено в документе 17.mcd. На фазовой кривой хорошо виден скачок, соответствующий увеличению амплитуды колебаний при передаче колебательной системе очередной порции энергии. При $t \rightarrow 0$ фазовая кривая приближается к предельному циклу (аттрактору).

■ **Задача 5.2.** Промоделируйте работу автогенератора, в котором каждый раз при прохождении положения равновесия (дважды за период) колебательному контуру сообщается энергия.

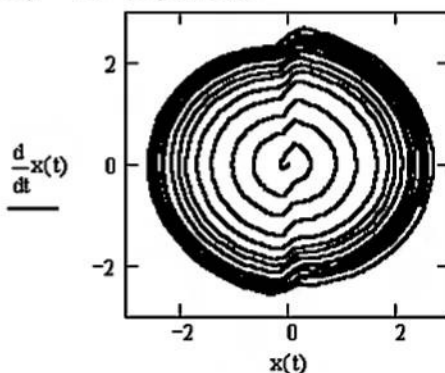
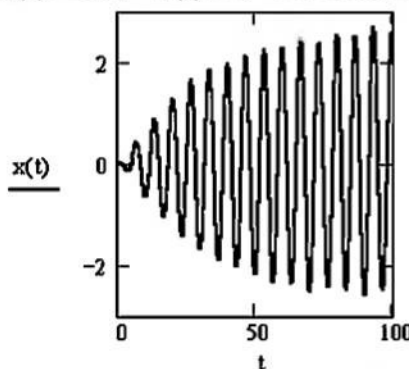
Рассмотрим механический аналог автогенератора. Пусть система подталкивает осциллятор вблизи положения равновесия, действуя на него с силой, пропорциональной скорости: $F(t) = F_m \cdot \Phi(a - |x(t)|) \cdot \dot{x}(t)$. Получаем: $m\ddot{x} + r\dot{x} + \omega_0^2 x = F_m \cdot \Phi(a - |x(t)|) \cdot \dot{x}(t)$. Решение задачи — в документе 18.mcd.

$m := 1$ $k := 0.9$ $r := 0.07$ $b := 1.5$ Given

18.mcd

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) + r \cdot \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) - b \cdot \Phi(0.1 - |x(t)|) \cdot \frac{d}{dt} x(t) = 0$$

$x(0) = 0.01$ $x'(0) = 0$ $x := \text{odesolve}(t, 100)$ $t := 0.1, 0.2 \dots 100$



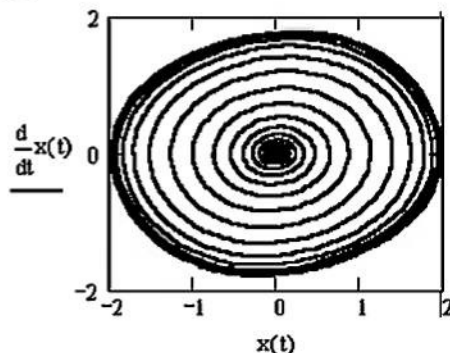
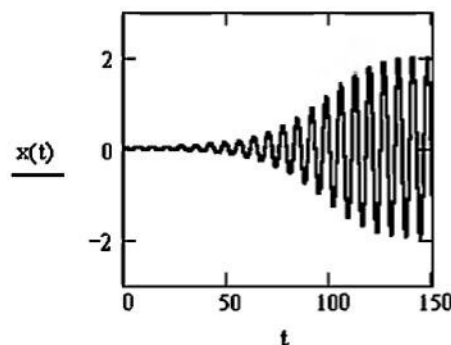
Задача 5.3. Про моделируйте автоколебательную систему, описывающуюся уравнением Ван-дер-Поля: $m\ddot{x} + kx = \alpha(1 - x^2)\dot{x}$.

$m := 1$ $k := 0.8$ $\alpha := 0.1$ Given

19.mcd

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) - \alpha \cdot (1 - x(t)^2) \cdot \frac{d}{dt} x(t) + kx(t) = 0 \quad x(0) = 0.01 \quad x'(0) = 0$$

$x := \text{odesolve}(t, 150)$ $t := 0.1, 0.2 \dots 150$



Решение — в документе 19.mcd. Колебательная система воздействует посредством положительной обратной связи на ключевой элемент, регулируя поступление энергии от источника. Амплитуда растет до тех пор, пока энергия потерь не будет равна энергии, поступающей от источника.

6. РАСЧЕТ ФИЛЬТРОВ

Фильтром называется пассивный двухполюсник, составленный из резисторов, конденсаторов и катушек индуктивности, предназначенный для разделения электрических колебаний различных частот. Различают помехоподавляющие, сглаживающие и резонансные фильтры, причем последние делятся на фильтры верхних частот, нижних частот, полосовые и заградительные. Комплексный коэффициент передачи фильтра по напряжению равен отношению комплексов выходного $\dot{U}_2$ и входного $\dot{U}_1$ напряжений:

$$\dot{K}(\omega) = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = K(\omega)e^{j\varphi}, \quad K(\omega) = |\dot{K}(\omega)| = U_2 / U_1.$$

Г-образный фильтр состоит из последовательно соединенных двух ветвей с импедансами $\dot{Z}_1$ и $\dot{Z}_2$, на которые подается входное напряжение $\dot{U}_1$ (рис. 19.1). Его коэффициент передачи равен:

$$\dot{K}(\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{i\dot{Z}_2}{i(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2)} = \frac{1}{1 + \dot{Z}_1/\dot{Z}_2}, \quad K(\omega) = |\dot{K}(\omega)|.$$

При этом ток через нагрузку считается пренебрежимо малым. Полоса пропускания фильтра — диапазон частот, на границах которого коэффициент передачи фильтра в $\sqrt{2}$ раз меньше максимального (рис. 19.2).

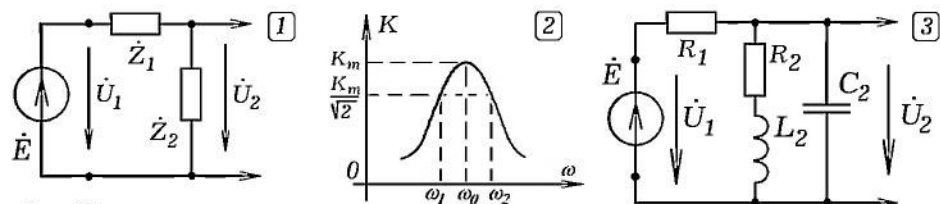
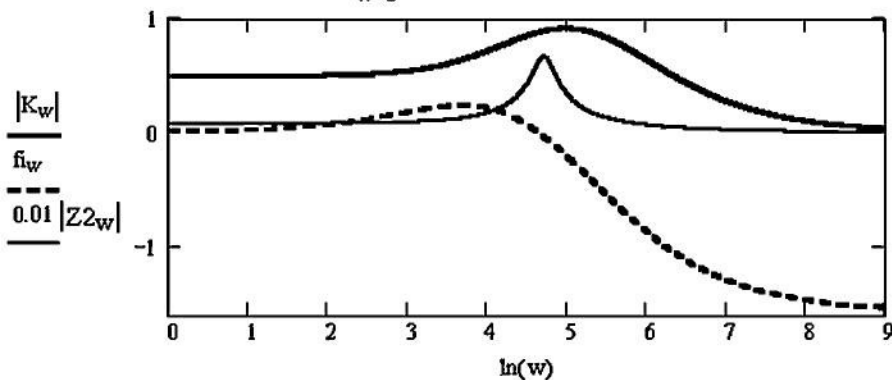


Рис. 19

$$\begin{aligned} i &:= \sqrt{-1} & w &:= 1, 2 \dots 10000 & C &:= 400 \cdot 10^{-6} & R1 &:= 8 & R2 &:= 8 & 20.mcd \\ Z1 &:= R1 & L &:= 0.2 \\ Z2_w &:= \frac{(R2 + i \cdot w \cdot L) \frac{-i}{w \cdot C}}{R2 + i \cdot w \cdot L - \frac{i}{w \cdot C}} & K_w &:= \frac{Z2_w}{Z1 + Z2_w} & f_{w} &:= \operatorname{atan}\left(\frac{\operatorname{Im}(K_w)}{\operatorname{Re}(K_w)}\right) \end{aligned}$$



Задача 6.1. Изучите зависимость коэффициента передачи от частоты Г-образного фильтра, содержащего резистор R_1 и параллельный колебательный контур, состоящий из последовательно соединенных резистора R_2 , катушки индуктивности L , параллельно которому подключен конденсатор C (рис. 19.3).

Импеданс параллельного колебательного контура равен

$$\dot{Z}_2 = \frac{(R_2 + j\omega L)(-j/\omega C)}{R_2 + j\omega L - j/\omega C}.$$

Решение представлено в документе 20.mcd. Вблизи резонансной частоты импеданс параллельного колебательного контура, а вместе с ним и модуль коэффициента передачи достигают максимального значения.

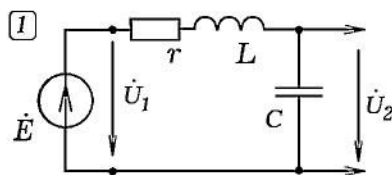
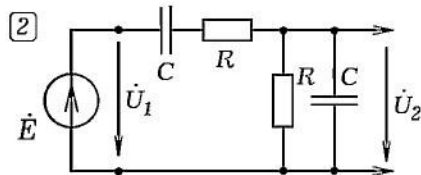


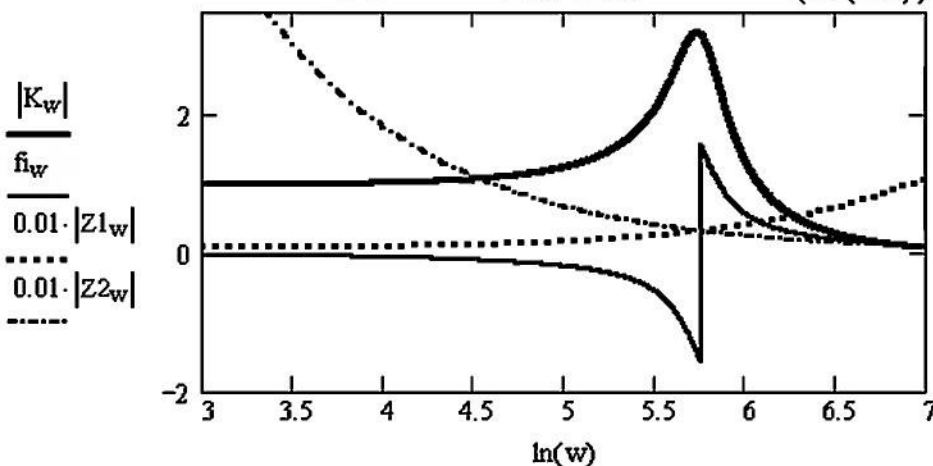
Рис.20



Задача 6.2. Фильтр состоит из активно-индуктивного и емкостного элементов (рис. 20.1). Изучите зависимость коэффициента $\dot{K} = K e^{j\varphi}$ передачи от частоты, постройте графики $K = K(\omega)$ и $\varphi = \varphi(\omega)$.

$$i := \sqrt{-1} \quad w := 1,2..2000 \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \quad R := 10 \quad L := 0.1 \quad \boxed{21.mcd}$$

$$Z1_w := R + i \cdot w \cdot L \quad Z2_w := \frac{-i}{w \cdot C} \quad K_w := \frac{Z2_w}{Z1_w + Z2_w} \quad \varphi_w := \text{atan}\left(\frac{\text{Im}(K_w)}{\text{Re}(K_w)}\right)$$



Импедансы ветвей фильтра и коэффициент передачи:

$$\dot{Z}_1 = R + j\omega L, \quad \dot{Z}_2 = -j/(\omega C), \quad \dot{K} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}.$$

Графики $K = K(\omega)$ и $\varphi = \varphi(\omega)$ получены в документе 21.mcd.

Задача 6.3. Исследовать частотную зависимость коэффициента передачи моста Вина, представляющего собой Г-образный фильтр, ветви которого содержат последовательно и параллельно соединенные резистор и конденсатор (рис. 20.2).

Импедансы ветвей моста Вина и его коэффициент передачи равны:

$$\dot{Z}_1 = R - \frac{j}{\omega C}, \quad \dot{Z}_2 = \frac{R(-j/\omega C)}{R - j/\omega C}, \quad \dot{K} = \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2}.$$

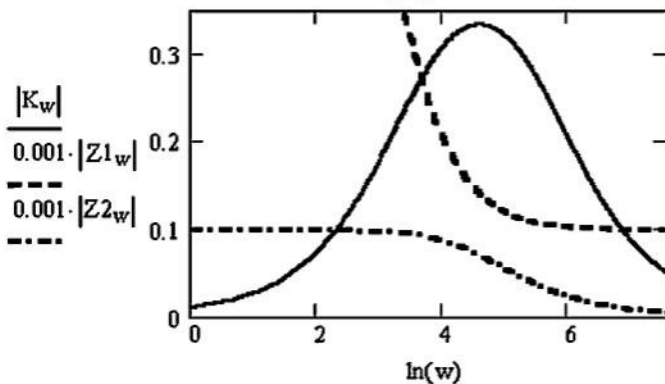
Среда MathCAD позволяет осуществлять символьные преобразования, что может быть использовано для получения аналитического выражения для модуля коэффициента передачи фильтра (документ 22.mcd). Графики зависимостей $K = K(\ln(w))$, $Z_1 = Z_1(\ln(w))$, $Z_2 = Z_2(\ln(w))$ построены в документе 23.mcd.

$$i := \sqrt{-1} \quad \left| \frac{1}{R - \frac{i}{w \cdot C}} + 1 \right| \rightarrow \frac{1}{\left[9 + \frac{\left(R^2 - \frac{1}{w^2 \cdot C^2} \right)^2}{R^2} \cdot w^2 \cdot C^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad \boxed{22.mcd}$$

$$i := \sqrt{-1} \quad w := 1, 2 \dots 2000 \quad C := 100 \cdot 10^{-6} \quad R := 100$$

23.mcd

$$Z1_w := R - \frac{i}{w \cdot C} \quad Z2_w := \frac{-R \cdot \frac{i}{w \cdot C}}{R - \frac{i}{w \cdot C}} \quad K_w := \frac{Z2_w}{Z1_w + Z2_w}$$



Трансформатор — статическое устройство, состоящее из двух или более обмоток, связанных индуктивной связью, и используемое для преобразования переменного напряжения (тока) некоторой частоты и амплитуды в переменное напряжение (ток) той же частоты и другой амплитуды. Первичная обмотка трансформатора подключается к источнику переменного напряжения; протекающий по ней ток i_1 создает переменное магнитное поле. Оно индуцирует в витках обеих обмоток ЭДС индукции. Между концами вторичной обмотки возникает переменное напряжение u_2 , величина которого зависит от соотношения витков в обмотках. Если ко вторичной обмотке подключить нагрузку, по ней потечет переменный ток i_2 , который создаст свое переменное магнитное поле, влияющее на первичную обмотку.

Задача 7.1. Смоделируйте работу линейного трансформатора (рис. 21.1). Получите графики зависимостей токов I_1 и I_2 в первичной и вторичной обмотках, потребляемой P_1 и полезной P_2 мощностей, КПД η от импеданса нагрузки Z_n .

Запишем второй закон Кирхгофа для линейного трансформатора:

$$(r_1 + j\omega L_1)\dot{I}_1 + j\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_1, \quad \dot{Z}_n\dot{I}_2 + (r_2 + j\omega L_2)\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 = 0,$$

где r_1, r_2 и L_1, L_2 — активные сопротивления и индуктивности первичной и вторичной обмоток, M — коэффициент взаимной индукции, $\dot{Z}_n$ — импеданс нагрузки. Если выразить комплексы токов, получим:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 - j\omega M\dot{I}_2}{r_1 + j\omega L_1}, \quad \dot{I}_2 = \frac{-j\omega M\dot{U}_1}{\omega^2 M^2 + (r_2 + j\omega L_2 + \dot{Z}_n)(r_1 + j\omega L_1)}.$$

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2\dot{Z}_n, \quad P_1 = U_1 I_1 \cos\varphi_1, \quad P_2 = U_2 I_2 \cos\varphi_2, \quad \eta = P_2/P_1.$$

Активные мощности P_1 и P_2 в цепи первичной и вторичной обмоток могут быть найдены как действующие части комплексов полной мощности $\dot{S}_1, \dot{S}_2$ (документ 24.mcd). Из графика $\eta = \eta(I_2)$ видно, что в режиме холостого хода ($I_2 = 0$) КПД равно 0, по мере увеличения I_2 КПД возрастает, достигает максимума, а затем убывает. Это объясняется тем, что при увеличении тока I_2 увеличивается полезная мощность и одновременно растут потери в меди (пропорционально I^2).

$$i := \sqrt{-1} \quad f := 50 \quad w := 2 \cdot \pi \cdot f \quad r1 := 13 \quad r2 := 5 \quad U1 := 100 \quad \boxed{24.mcd}$$

$$k := 0,1..2000 \quad dL := 0.0005 \quad L1 := 2200 \cdot dL \quad L2 := 120 \cdot dL$$

$$M := 600 \cdot dL$$

$$Z_{nk} := 0.25 \cdot k$$

$$I2_k := \frac{U1}{i \cdot w \cdot M - \frac{r2 + i \cdot w \cdot L2 + Z_{nk}}{i \cdot w \cdot M} \cdot (r1 + i \cdot w \cdot L1)}$$

$$I1_k := \frac{U1 - i \cdot w \cdot M \cdot I2_k}{r1 + i \cdot w \cdot L1} \quad U2_k := I2_k \cdot Z_{nk}$$

$$P1_k := \text{Re}[U1 \cdot (\text{Re}(I1_k) - i \cdot \text{Im}(I1_k))] \quad P2_k := \text{Re}[U2_k \cdot (\text{Re}(I2_k) - i \cdot \text{Im}(I2_k))]$$

$$\text{KPD}_k := \frac{P2_k}{P1_k}$$

$$\text{DZI1}_k := |I1_k|$$

$$\text{DZI2}_k := |I2_k|$$

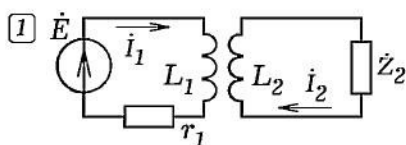
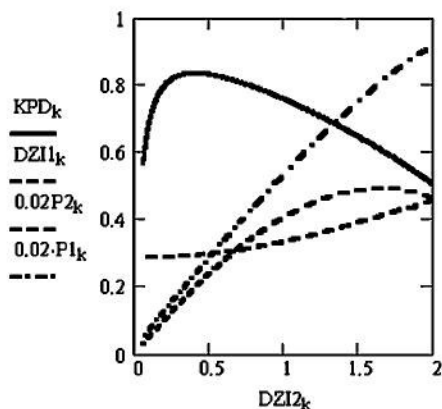
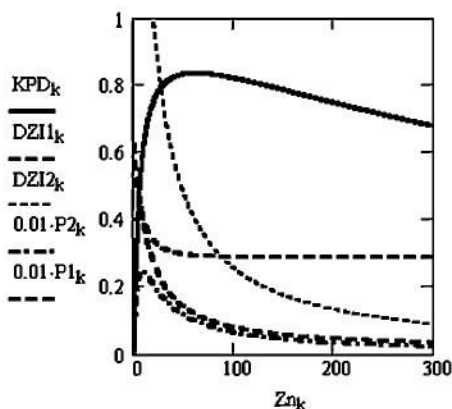
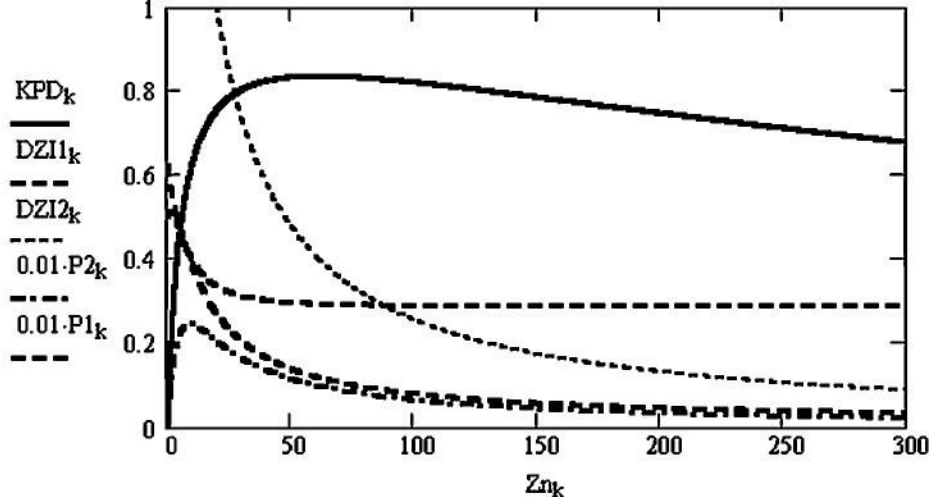
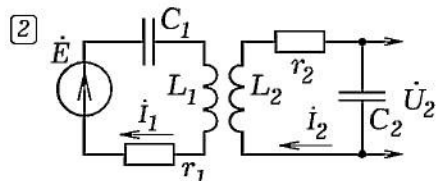


Рис.21



Задача 7.2. Изучите частотную зависимость коэффициента передачи двух связанных колебательных контуров (рис. 21.2) при различных коэффициентах взаимной индукции.

Рассмотрим два колебательных контура, связанных индуктивной связью (катушки индуктивности находятся на одном сердечнике). Первый контур под-

включен к источнику переменного ЭДС $E = \dot{U}_1$, выходное напряжение $\dot{U}_2$ снимается с конденсатора C_2 второго контура. Из второго закона Кирхгофа:

$$(r_1 + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C_1})\dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2 = \dot{U}_1, \quad (r_2 + j\omega L_2 - \frac{j}{\omega C_2})\dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 = 0.$$

Решим эту систему уравнений:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1 - j\omega M \dot{I}_2}{r_1 + j\omega L_1 - j/(\omega C_1)},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-j\omega M \dot{U}_1}{(r_1 + j\omega L_1 - j/(\omega C_1)) \cdot (r_2 + j\omega L_2 - j/(\omega C_2)) + \omega^2 M^2}.$$

Выходное напряжение и коэффициент передачи равны:

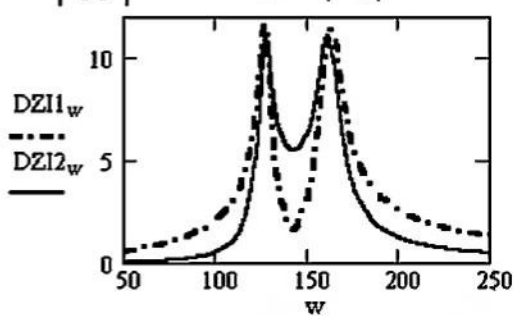
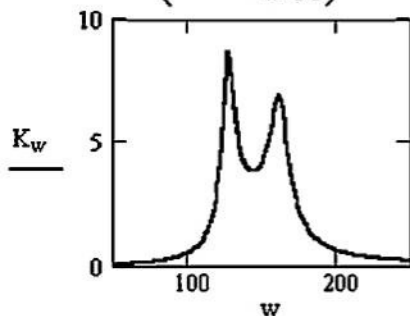
$$\dot{U}_2 = -\frac{j}{\omega C_2} \dot{I}_2, \quad K = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}, \quad K = |K|.$$

Решение задачи — в документе 25.mcd. Проводя вычисления при различных коэффициентах взаимной индукции M , можно убедиться, что амплитудно-частотная характеристика $K = K(\omega)$ колебательных контуров, связанных индуктивной связью, имеет два максимума, расстояние между которыми при увеличении коэффициента взаимной индукции M растет. При малых значениях M эти максимумы сливаются в один. Справа построены зависимости действующих значений токов в первом и втором контурах от частоты. Индуктивно-связанные цепи имеют почти П-образную характеристику и используются в качестве фильтров, пропускающих сигнал в некотором диапазоне частот.

$$\begin{aligned} i := \sqrt{-1} \quad r1 := 4 \quad r2 := 5 \quad C1 := 100 \cdot 10^{-6} \quad C2 := 100 \cdot 10^{-6} \quad \boxed{25.mcd} \\ w := 50, 51 \dots 300 \quad U1 := 100 \quad L1 := 0.5 \quad L2 := 0.5 \quad M := 0.12 \end{aligned}$$

$$I2_w := \frac{-i \cdot w \cdot M \cdot U1}{\left(r1 + i \cdot w \cdot L1 - \frac{i}{w \cdot C1}\right) \cdot \left(r2 + i \cdot w \cdot L2 - \frac{i}{w \cdot C2}\right) + w^2 \cdot M^2} \quad U2_w := I2_w \cdot \frac{-i}{w \cdot C2}$$

$$I1_w := \frac{U1 - i \cdot w \cdot M \cdot I2_w}{r1 + i \cdot \left(w \cdot L1 - \frac{1}{w \cdot C1}\right)} \quad K_w := \left| \frac{U2_w}{U1} \right| \quad DZI2_w := |I2_w| \quad DZI1_w := |I1_w|$$



8. ЦЕПИ, СОДЕРЖАЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ЭДС

Перечислим причины протекания по электрическим цепям периодических негармонических токов: 1) источник электрической энергии вырабатывает негармоническую ЭДС (например, генерирует прямоугольные импульсы); 2) цепь содержит нелинейный элемент (лампа накаливания, полупроводниковый диод), работа которых описывается нелинейными алгебраическими или дифференциальными уравнениями.

По теореме Фурье периодическая функция $f(t) = f(t + T)$ может быть представлена в виде суммы бесконечного числа гармонических колебаний (гармоник), с частотами кратными основной частоте $\omega = 2\pi/T$ (частоты $\omega, 2\omega, 3\omega \dots$):

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega t) dt,$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = \arctg(a_n/b_n).$$

Метод гармонического анализа электрической цепи заключается в следующем: 1) периодическую негармоническую ЭДС источника частотой ω раскладывают в ряд Фурье, определяя постоянную составляющую и гармоники 1, 2, 3, ... порядка с частотами $\omega, 2\omega, 3\omega \dots$; 2) для всех ветвей цепи находят постоянную составляющую тока I_0 , вызванную постоянной составляющей ЭДС; 3) для каждой ветви вычисляют частичные токи (амплитуду и фазу), вызванные действием первой, второй, третьей и т.д. гармониками ЭДС, которые также имеют частоты $\omega, 2\omega, 3\omega \dots$; 4) суммируя соответствующие частичные токи, определяют результирующие токи в каждой ветви.

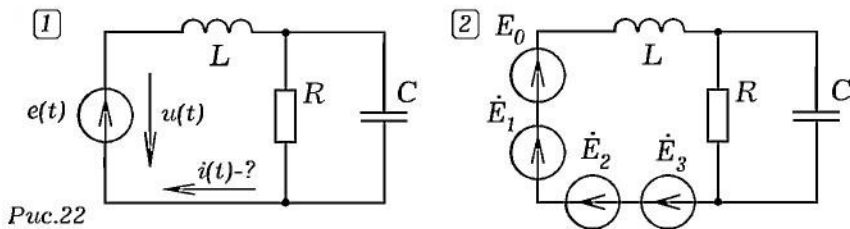


Рис.22

Рассмотрим цепь, изображенную на рис.22.1. Так как обычно амплитуда гармоник с ростом их порядка убывает, то можно ограничиться несколькими первыми слагаемыми:

$$e(t) = E_0 + E_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + E_{m2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + E_{m3} \sin(3\omega t + \varphi_3).$$

Заменим этот источник источником постоянной ЭДС E_0 и тремя источниками переменной ЭДС (рис. 22.2), у которых $E_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1)$, $E_{m2} \sin(2\omega t + \varphi_2)$, $E_{m3} \sin(3\omega t + \varphi_3)$. Постоянная составляющая тока: $I_0 = E_0/R$.

Найдем импеданс цепи для k -ой гармоники:

$$\dot{Z}_k = jk\omega L + \frac{R(-j/k\omega C)}{R - j/k\omega C} = Z_k e^{j\varphi_k},$$

где $\operatorname{tg} \varphi_k = I_m(Z_k) / \operatorname{Re}(Z_k)$. Комплексная амплитудная амплитуда k -ой гармоники тока в неразветвленной части цепи: $\dot{I}_{mk} = \dot{U}_{mk} / \dot{Z}_k = I_{mk} e^{j\varphi_k}$. Искомый ток равен:

$$i(t) = I_0 + I_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{m2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + I_{m3} \sin(3\omega t + \varphi_3).$$

Действующие значения напряжения и тока:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots}, \quad I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots},$$

где I_0, U_0 — постоянные составляющие тока и напряжения, I_k, U_k — действующие значения тока и напряжения для k -ой гармоники. Полная, активная и реактивная мощности цепи:

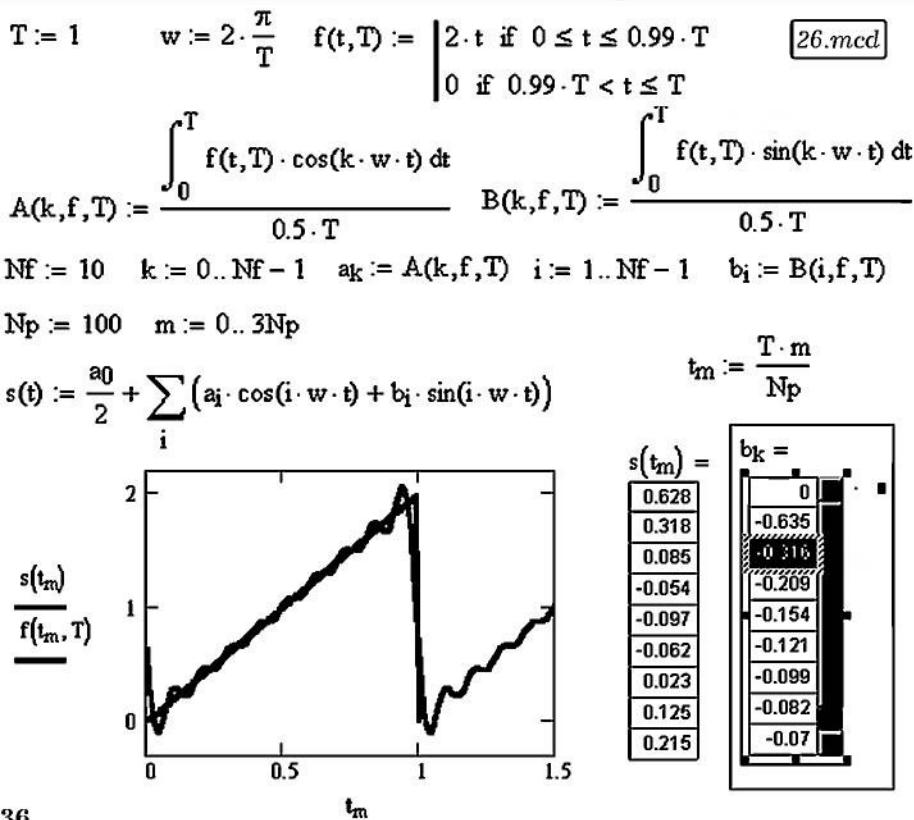
$$S = U_0 I_0 + U_1 I_1 + U_2 I_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} U_i I_i,$$

$$P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} U_i I_i \cos \varphi_i,$$

$$Q = U_0 I_0 + U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} U_i I_i \sin \varphi_i,$$

где φ_i — сдвиг фаз между i -ой гармоникой тока и напряжения. Коэффициент мощности равен:

$$\kappa = \frac{P}{S} = \frac{U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 + \dots}{U_0 I_0 + U_1 I_1 + U_2 I_2 + \dots}.$$

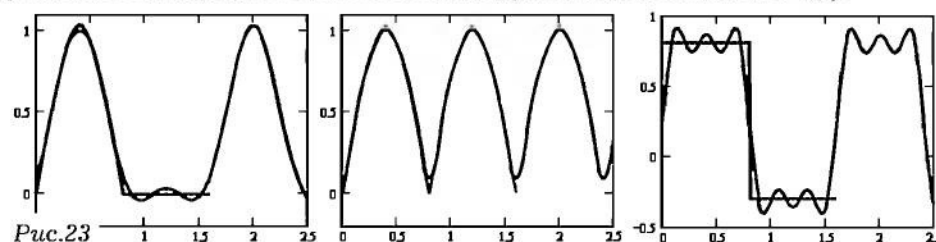


■ Задача 8.1. Разложите пилообразные импульсы напряжения, получающиеся в ряд Фурье. Восстановите сигнал по 3, 7, 15, 30 и 50 первым гармоникам. Сравните получившуюся функцию с исходной.

Решение задачи предложено в документе 26.mcd. Задана пилообразная функция $f(t)$, вычислены массивы косинусоидальных и синусоидальных членов ряда Фурье, число которых задается Nf . Осуществлено восстановление функции по первым членам ряда Фурье, создан массив $s(t)$, построены графики.

■ Задача 8.2. Разложите в ряд Фурье импульсы напряжения, получающиеся в результате однополупериодного и двухполупериодного выпрямления, а также прямоугольные импульсы. Восстановите сигнал по 3, 7, 15, 30 и 50 первым гармоникам.

Задача решается аналогичным образом. На рис. 23 представлены графики исходной функции $u(t)$ и функции, восстановленной после разложения в ряд Фурье для каждого из трех случаев. Можно убедиться в том, что при увеличении числа учитываемых гармоник восстановленная функция приближается к $u(t)$.



■ Задача 8.3. Цепь, состоит из параллельно соединенных резистора и конденсатора, к которым последовательно подключена катушка индуктивности (рис. 22). Напряжение на полюсах источника изменяется по закону: $u(t) = 40 + 35 \cos 2\omega t - 15 \cos 4\omega t + 4 \sin 6\omega t$. Определите ток $i(t)$ в неразветвленной части цепи.

В документе 27.mcd построен график $u(t)$, рассчитаны импедансы и амплитуды токов для различных гармоник, найдены действующие значения тока и напряжения, определена зависимость $i(t)$ в неразветвленной части цепи, построены графики $u(t), i(t)$.

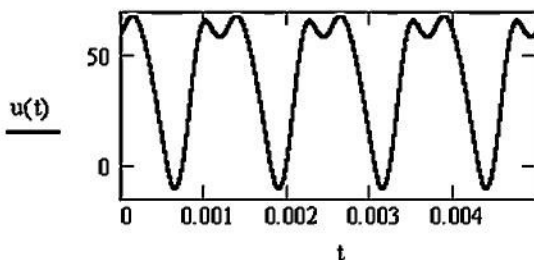
$$U_0 := 40 \quad U_{m2} := 35 \quad U_{m4} := 15 \quad U_{m6} := 4$$

$$i := \sqrt{-1}$$

27.mcd

$$\phi_2 := 0 \quad \phi_4 := 0 \quad \phi_6 := 0 \quad w := 2 \cdot \pi \cdot 400$$

$$u(t) := U_0 + U_{m2} \cdot \cos(2w \cdot t + \phi_2) - U_{m4} \cdot \cos(4 \cdot w \cdot t + \phi_4) + U_{m6} \cdot \sin(6 \cdot w \cdot t + \phi_6)$$



$$L := 0.0123$$

$$C := 2.3 \cdot 10^{-6}$$

$$R := 210$$

$$I_0 := \frac{U_0}{R} \quad I_0 = 0.19$$

$$Z2 := i \cdot 2w \cdot L + \frac{R \cdot \frac{-i}{2w \cdot C}}{R + \frac{-i}{2w \cdot C}} \quad Z2 = 30.46 - 12.125i \quad |Z2| = 32.784$$

$$\psi2 := \arg(Z2) \quad \psi2 = -0.379 \quad \text{Im}_2 := \frac{U_{m2}}{|Z2|} \quad \text{Im}_2 = 1.068$$

$$Z4 := i \cdot 4w \cdot L + \frac{R \cdot \frac{-i}{4w \cdot C}}{R + \frac{-i}{4w \cdot C}} \quad Z4 = 8.544 + 82.164i \quad |Z4| = 82.607$$

$$\psi4 := \arg(Z4) \quad \psi4 = 1.467 \quad \text{Im}_4 := \frac{U_{m4}}{|Z4|} \quad \text{Im}_4 = 0.182$$

$$Z6 := i \cdot 6w \cdot L + \frac{R \cdot \frac{-i}{6w \cdot C}}{R + \frac{-i}{6w \cdot C}} \quad Z6 = 3.885 + 157.181i \quad |Z6| = 157.229$$

$$\psi6 := \arg(Z6) \quad \psi6 = 1.546 \quad \text{Im}_6 := \frac{U_{m6}}{|Z6|} \quad \text{Im}_6 = 0.025$$

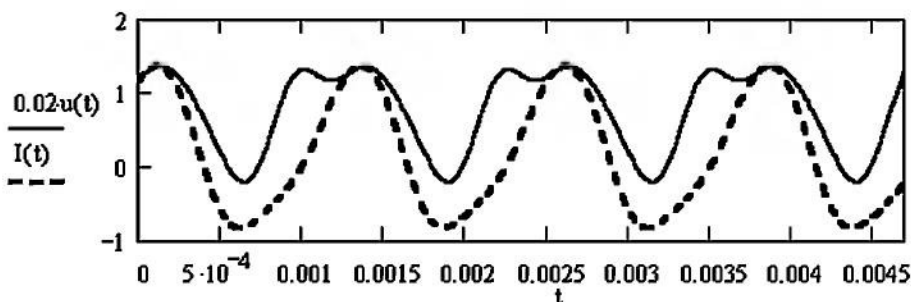
$$U := \sqrt{(U_0)^2 + \left(\frac{U_{m2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m4}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{m6}}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$I := \sqrt{(I_0)^2 + \left(\frac{\text{Im}_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\text{Im}_4}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\text{Im}_6}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad U = 48.301 \quad I = 0.789$$

$$S := U \cdot I \quad P := U_0 \cdot I_0 + U_{m2} \cdot \text{Im}_2 \cdot \cos(\psi2) + U_{m4} \cdot \text{Im}_4 \cdot \cos(\psi4) + U_{m6} \cdot \text{Im}_6 \cdot \cos(\psi6)$$

$$S = 38.12 \quad P = 42.62 \quad \chi := \frac{P}{S} \quad \chi = 1.118$$

$$I(t) := I_0 + \text{Im}_2 \cdot \cos(2w \cdot t + \phi2 + \psi2) - \text{Im}_4 \cdot \cos(4 \cdot w \cdot t + \phi4 + \psi4) + \text{Im}_6 \cdot \cos(6 \cdot w \cdot t + \phi6 + \psi6)$$



■ **Задача 8.4.** К источнику периодической негармонической ЭДС подключена активно-емкостная (активно-индуктивная) нагрузка. Используя разложение в ряд Фурье, получите кривые тока и изучите их спектр.

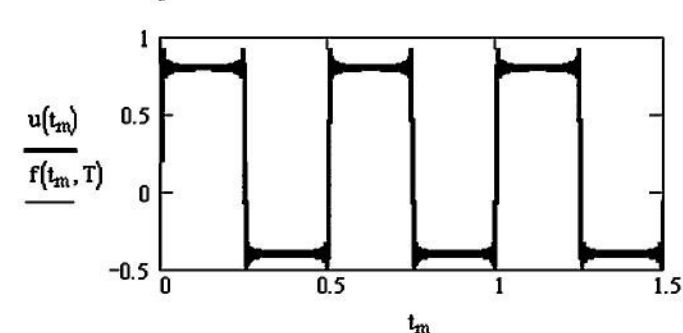
Задача решается методом гармонического анализа. Будем считать, что источник вырабатывает прямоугольные импульсы. В документе 28.mcd осуществляется разложение периодической негармонической ЭДС в ряд Фурье, затем определяются токи, соответствующие каждой гармонике напряжения, находятся результирующие токи в RC- и RL-цепях, исследуется их амплитудно-частотный спектр.

$$T := 0.5 \quad w := 2 \cdot \frac{\pi}{T} \quad f(t, T) := \begin{cases} 0.8 & \text{if } 0 \leq t \leq 0.5 \cdot T \\ -0.4 & \text{if } 0.5 \cdot T < t \leq T \end{cases} \quad \boxed{28.mcd}$$

$$A(k, f, T) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t, T) \cdot \cos(k \cdot w \cdot t) dt \quad B(k, f, T) := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t, T) \cdot \sin(k \cdot w \cdot t) dt$$

$$Nf := 50 \quad k := 0..Nf-1 \quad a_k := A(k, f, T) \quad i := 1..Nf-1 \quad b_i := B(i, f, T)$$

$$u(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_i \left(a_i \cdot \cos(i \cdot w \cdot t) + b_i \cdot \sin(i \cdot w \cdot t) \right) \quad m := 0..600 \quad t_m := \frac{T \cdot m}{200}$$



$u(t_m) =$	$b_k =$
0.2	0
0.724	0.764
0.907	0
0.814	0.255
0.742	0
0.794	0.153
0.84	0
0.803	0.109

$$C := 5000 \cdot 10^{-6} \quad L := 0.5 \quad R := 5$$

$$i := 1..Nf-1 \quad k := 0..Nf-1 \quad b_i := B(i, f, T) \quad a_k := A(k, f, T)$$

$$IC(t) := \sum_i \left[\frac{a_i}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(i \cdot w \cdot C)^2}}} \cdot \cos\left(i \cdot w \cdot t + \operatorname{atan}\left(\frac{1}{i \cdot w \cdot C \cdot R}\right)\right) + \frac{b_i}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(i \cdot w \cdot C)^2}}} \cdot \sin\left(i \cdot w \cdot t + \operatorname{atan}\left(\frac{1}{i \cdot w \cdot C \cdot R}\right)\right) \right]$$

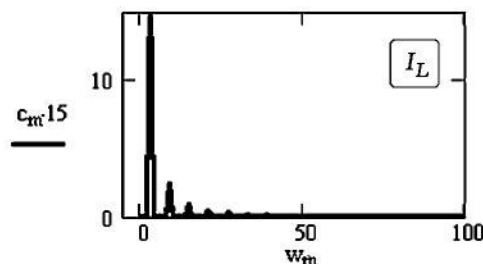
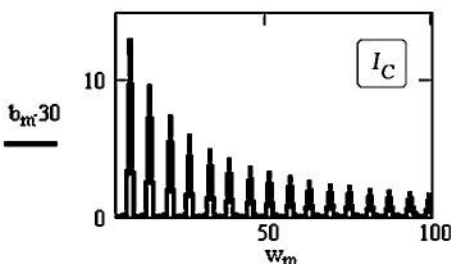
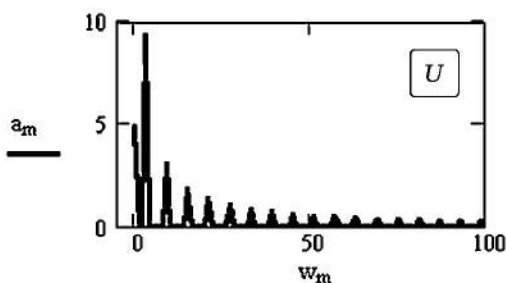
$$\Pi(t) := \sum_i \left[\frac{a_i}{\sqrt{R^2 + (i \cdot w \cdot L)^2}} \cdot \cos\left(i \cdot w \cdot t - \operatorname{atan}\left(i \cdot w \cdot \frac{L}{R}\right)\right) + \frac{b_i}{\sqrt{R^2 + (i \cdot w \cdot L)^2}} \cdot \sin\left(i \cdot w \cdot t - \operatorname{atan}\left(i \cdot w \cdot \frac{L}{R}\right)\right) \right]$$

$$m := 0..600 \quad t_m := \frac{T \cdot m}{200} \quad w_m := m \cdot 1 \quad x_m := u(t_m) \quad y_m := IC(t_m) \quad z_m := \Pi(t_m)$$

$$xx := \operatorname{cfft}(x) \quad a_m := |xx_m|$$

$$yy := \operatorname{cfft}(y) \quad b_m := |yy_m|$$

$$zz := \operatorname{cfft}(z) \quad c_m := |zz_m|$$



В процессе вычислений следует учесть, что если нагрузка активно-емкостная (индуктивная), то ток опережает напряжение (напряжение опережает ток). При активно-индуктивной нагрузке кривая тока в большей степени похожа на синусоиду, чем кривая напряжения, а в случае активно-емкостной — наоборот (документ 28.mcd). Это объясняется тем, что гармоникам тока высокого порядка конденсатор оказывает меньшее сопротивление, а катушка индуктивности — большее. Спектр синусоидального сигнала состоит из одной гармоники частотой ω . Как видно из амплитудно-частотного спектра тока IC через конденсатор, отношение I_{mi}/I_{m1} для гармоник высокого порядка больше, чем аналогичное отношение в спектре напряжения. И наоборот, в спектре тока IL , протекающего через катушку индуктивности, гармоники высокого порядка представлены в меньшей степени, чем в спектре напряжения.

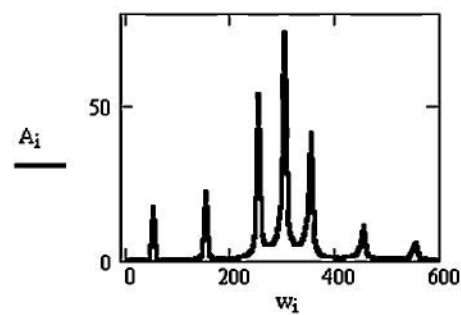
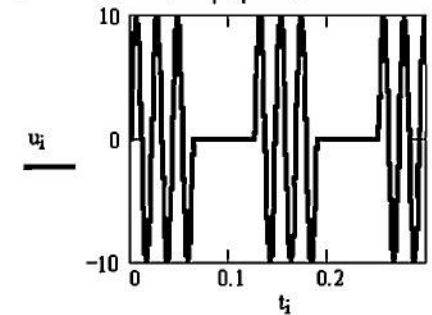
Задача 8.5. Получите спектр последовательности радиоимпульсов, представляющих собой обрывки синусоидальных колебаний.

Решение представлено в документе 29.mcd. По мере увеличения частоты следования радио-импульсов $\omega 0$ происходит расширение спектра, боковые максимумы удаляются от центрального, соответствующего основной частоте $\omega 1$.

$i := 0..1000$ $dt := 0.001$ $t_i := i \cdot dt$ $w1 := 300$ $w0 := 50$ $a := 0$ 29.mcd

$T := 0.6$ $w := 2 \cdot \frac{\pi}{T}$ $u_i := \begin{cases} 10 \cdot \sin(w1 \cdot t_i) & \text{if } \sin(w0 \cdot t_i) > a \\ 0 & \text{if } \sin(w0 \cdot t_i) \leq 0 \end{cases}$

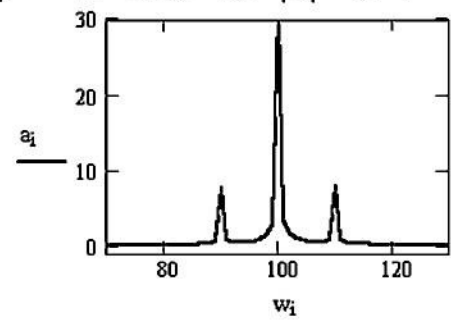
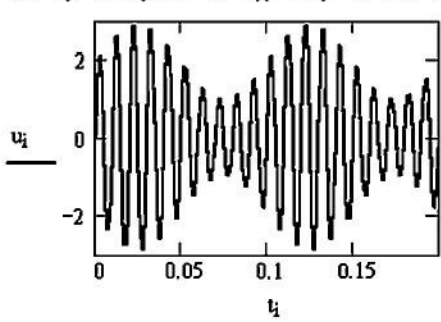
$Y := \text{cfft}(u)$ $A_i := |Y_i|$ $w_i := 2 \cdot \pi \cdot i$



Задача 8.6. Получите спектр амплитудно-модулированного сигнала $u(t) = U_0(1 + \sin(\Omega t)) \sin(\omega t)$.

$i := 0..1000$ $dt := 0.001$ $t_i := i \cdot dt$ 29.mcd

$u_i := (2 + \sin(2 \cdot \pi \cdot 10 \cdot t_i)) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 100 \cdot t_i)$ $Y := \text{cfft}(u)$ $a_i := |Y_i|$ $w_i := i$



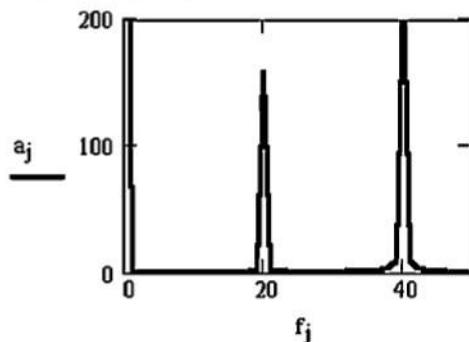
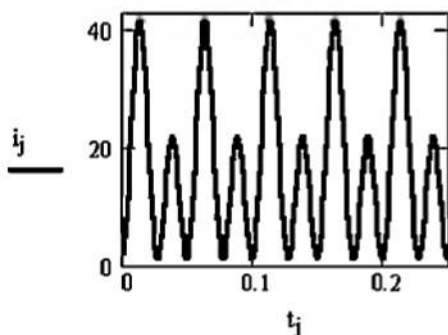
Видно, что спектр содержит колебания на основной частоте и на двух зеркальных частотах (документ 30.mcd).

Задача 8.7. Характеристика нелинейного элемента может быть аппроксимирована полиномом второй степени $i(u) = au^2 + bu + c$. Изучите спектральный состав отклика системы (силы тока) на оказываемое гармоническое воздействие (напряжение).

Создан массив u_i , соответствующий приложенному гармоническому напряжению, а ток (отклик системы) представлен в массиве i_j . Из графика тока и его спектра видно, что при наличии нелинейного элемента ток в цепи изменяется по негармоническому закону, а в его спектре появляются дополнительные гармоники (документ 31.mcd).

$$j := 0..1000 \quad dt := 0.001 \quad t_j := j \cdot dt \quad u_j := 10 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot t_j) \quad \boxed{31.mcd}$$

$$i_j := 0.3 \cdot (u_j)^2 + u_j + 2 \quad Y := \text{cfft}(i) \quad a_j := |Y_j| \quad f_j := j$$



* * * * *

Широкое использование персональных ЭВМ в учебном процессе позволяет существенным образом изменить методику изучения и расчета электрических цепей, упростить и ускорить осуществление громоздких, многократно повторяющихся вычислительных процедур, решение систем дифференциальных уравнений, построение графиков и диаграмм. Если раньше анализ исследуемой системы производился, как правило, аналитически, то теперь появилась возможность применения численных методов компьютерного моделирования, что имеет определенные преимущества.

Рассмотренные выше задачи создают лишь общее представление о возможностях пакета MathCAD при изучении основ электротехники и электроники. Настоящее пособие позволит существенным образом изменить работу студентов на практических занятиях, облегчит подготовку к экзаменам.

Литература

1. Данилов И.А., Иванов П.М. Общая электротехника с основами электроники: Учеб. пособие для студ. неэлектротехн. спец. средних спец. учеб. заведений. — М.: Высшая школа, 2000. — 752 с.
2. Дьяконов В. MathCAD 2000: учебный курс / В.Дьяконов — СПб.: Питер, 2001. — 592 с.
3. Касаткин А.С., Немцов М.В. Электротехника. — М.: Высшая школа, 2000. — 542 с.
4. Кирьянов Д.В. MathCAD 12: наиболее полное руководство. — СПб. БХВ — Петербург, 2005. — 562.
5. Попов В.П. Основы теории цепей: Учеб. для вузов. — М.: Высшая школа, 2000. — 575 с.
6. Синдеев Ю.Г., Грановский В.Г. Электротехника: учебник для студентов педагогических и технических вузов. — Ростов-на-Дону: Феникс, 1999. — 448 с.
7. Теоретические основы электротехники. Т.1. Основы теории линейных цепей: Учебник для электротехн. вузов / Под ред. П.А.Ионкина. — М.: Высш. школа, 1976. — 544 с.

Задание 1. Цепь содержит шесть ветвей, в каждой из которых имеется по одному источнику ЭДС и резистору (рис. 24). В таблице 1 даны параметры всех элементов для различных вариантов. Перерисуйте схему, учитывая конкретные значения ЭДС источников и сопротивлений резисторов. Составьте и решите систему уравнений Кирхгофа. Рассчитайте цепь методом контурных токов. Определите мощности, вырабатываемые всеми источниками и потребляемые нагрузкой, составьте баланс мощностей. При этом следует учесть, что если направление ЭДС и тока через источник противоположны, то источник работает в режиме потребителя, его мощность отрицательная. Для произвольного контура, содержащего не менее двух источников ЭДС, постройте векторную диаграмму.

Таблица 1

N	E_1 В	E_2 В	E_3 В	E_4 В	E_5 В	E_6 В	R_1 Ом	R_2 Ом	R_3 Ом	R_4 Ом	R_5 Ом	R_6 Ом
1	-81	15	44	-17	25	-15	12	21	19	16	29	14
2	32	-24	16	21	-12	33	23	14	35	17	19	18
3	-33	18	-26	11	27	-18	13	31	24	34	23	21
4	27	-14	32	25	-11	23	14	37	13	22	12	19
5	-18	47	13	-25	18	-15	17	13	19	41	17	27
6	12	-51	-27	31	16	13	22	18	25	14	31	31
7	-24	25	12	-27	-28	-13	31	15	21	32	19	13
8	13	-11	-12	32	32	15	37	26	12	21	18	16
9	-17	13	19	-35	35	-14	21	33	35	15	13	17
10	37	-16	-26	18	-32	22	11	16	42	27	42	31

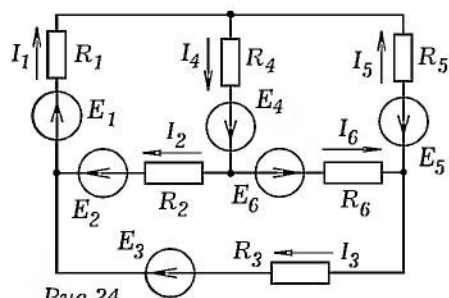


Рис.24

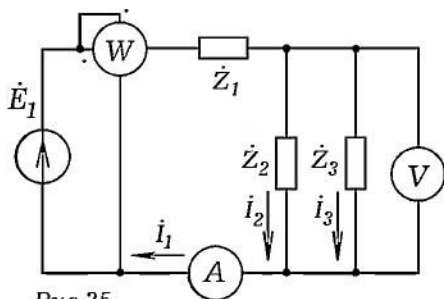


Рис.25

Задание 2. Цепь состоит из источника переменной ЭДС и трех нагрузок $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$, $\dot{Z}_3$, соединенных смешанно (рис. 25). Каждая нагрузка содержит последовательно соединенные резистор, конденсатор и катушку индуктивности. Их параметры для различных вариантов приведены в таблице 2. Частота напряжения питания 50 Гц. Рассчитайте цепь, определите ее импеданс, комплексы токов и напряжений на каждой нагрузке. Постройте векторную диаграмму. Вычислите комплекс полной мощности, активную и реактивную мощности. Определите показания амперметра, вольтметра и ваттметра.

N	E В	R_1 Ом	C_1 мкФ	L_1 Гн	R_2 Ом	C_2 мкФ	L_2 Гн	R_3 Ом	C_3 мкФ	L_3 Гн
1	120	12	210	0,23	25	110	0,12	14	130	0,13
2	140	23	120	0,12	15	170	0,18	22	220	0,22
3	190	14	95	0,18	12	190	0,16	17	310	0,17
4	170	25	140	0,24	22	180	0,22	13	170	0,21
5	130	13	110	0,17	17	120	0,26	27	250	0,18
6	110	11	130	0,11	28	210	0,13	15	270	0,16
7	180	12	91	0,21	16	330	0,29	24	180	0,24
8	140	21	82	0,16	11	430	0,17	31	210	0,15
9	160	16	110	0,25	23	160	0,23	12	320	0,18
10	110	22	150	0,13	24	150	0,24	18	120	0,26

Задание 3. Исходя из номера своего варианта (таблица 3), выпишите параметры однофазных нагрузок 1, 2, 3 и трехфазной симметричной нагрузки 4. В таблице 3 указаны вид сети (трех или четырехпроводная), ее линейное напряжение U_L , номинальное напряжение U , мощность P , коэффициент мощности $\cos \varphi$ и характер (RL — активно-индуктивная и RC — активно-емкостная) всех однофазных нагрузок, а также аналогичные параметры одной фазы симметричной трехфазной нагрузки. Частота переменного тока 50 Гц. Составьте схему, состоящую из трех источников переменной ЭДС, трех однофазных и одной трехфазной нагрузок, и ваттметров для измерения потребляемой мощности. Определите линейные и фазные токи и напряжения, рассчитайте полную, активную и реактивную мощности, определите показания ваттметров. Постройте векторную диаграмму цепи.

Таблица 3

Номер варианта		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Число проводов		3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
Лин. напр. U_L , В		380	220	220	220	380	380	220	380	220	220
Наг- руз- ка 1	U_1 , В	380	127	220	127	380	220	220	220	220	127
	P_3 , кВт	13	14	21	24	19	27	28	19	14	17
	$\cos \varphi_1$	0,9	0,8	0,7	1	0,5	0,4	1	0,7	0,3	0,9
	RLC	RC	RC	RL	R	RL	RL	R	RC	RL	RC
Наг- руз- ка 2	U_2 , В	380	127	220	127	380	220	220	220	220	127
	P_3 , кВт	15	24	11	12	13	15	18	16	17	21
	$\cos \varphi_2$	1	0,4	0,6	1	0,3	0,4	1	0,8	0,9	0,5
	RLC	R	RC	RL	R	RL	RC	R	RL	RC	RL
Наг- руз- ка 3	U_3 , В	380	127	220	127	380	220	220	220	220	127
	P_3 , кВт	23	13	18	24	33	22	28	26	13	14
	$\cos \varphi_3$	0,7	0,8	1	0,4	1	0,6	0,3	0,7	0,3	0,9
	RLC	RL	RC	R	RL	R	RL	RC	R	RL	RC
Фаза наг- руз- ки 4	U_ϕ , В	220	220	127	220	220	380	127	380	127	220
	P_n , кВт	24	54	43	41	36	24	36	46	23	27
	$\cos \varphi$	0,6	0,5	0,4	0,9	0,3	0,8	0,7	0,5	0,9	0,4
	RLC	RC	RL	RC	RL	RC	RC	RL	RL	RC	RC